Τέχνη & Μαθηματικά: Ο θαυμαστός κόσμος των fractals

Κωτσάνη Ναταλία[1], Παναγιωτόπουλος Αριστοτέλης[2], Παπανικολάου Αποστόλης[3], Μαυρομμάτης Άρης[4]

[1] Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
nataliakotsani@gmail.com
[2] Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign
aristotelis.panagiotopoulos@gmail.com
[3] Καθηγητής Εθνικής Εστίας Επιστημών, επιστημονικός σύμβουλος μουσείου Ηρακλειδών
apapani@math.uoa.gr
[4] Καθηγητής Εθνικής Εστίας Επιστημών, επιστημονικός σύμβουλος μουσείου Ηρακλειδών
amavromatis@rhodes.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, «Ο θαυμαστός Κόσμος των Fractals», το οποίο αναλύεται στην εισήγηση αυτή, εισάγει τους μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε σύγχρονες έννοιες των μαθηματικών και της πληροφορικής, με έναυσμα τους πίνακες της έκθεσης του Μουσείου Ηρακλειδών, μέσα από διάλογο και εκπαιδευτικά παιχνίδια. Αποτελεί μία από τις θεματικές ενότητες του εκπαιδευτικού προγράμματος «Τέχνη και Μαθηματικά», το οποίο υλοποιείται από το 2005 στο χώρο του μουσείου. Πρόκειται για μια διαθεματική και αλληλεπιδραστική εκπαιδευτική πρόταση, που πραγματοποιείται με συνεχή εξέλιξη και έχει αξιολογηθεί με πολύ θετικές κριτικές από εκατοντάδες μαθητές και εκπαιδευτικούς σχολείων απ' όλη την Ελλάδα.

Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ένα ανοιχτό ερώτημα, τέσσερα εκπαιδευτικά παιχνίδια, τέσσερις μαθηματικές έννοιες, τρεις υπολογιστικές εφαρμογές και τρεις διάσημοι ζωγράφοι «επιστρατεύονται» στην «υπηρεσία» της μάθησης. Πέρα και έξω από τις σχολικές αίθουσες και τις στερεότυπες μαθησιακές προσεγγίσεις, οι μαθητές προσκαλούνται να ανακαλύψουν μια σύγχρονη και ανεξερεύνητη για εκείνους πλευρά των θετικών επιστημών και μαζί της την «ξεχασμένη» ομορφιά των μαθηματικών. Με τη βοήθεια εύχρηστων και ελκυστικών διαδραστικών εφαρμογών, ενός διαδραστικού πίνακα και με όχημα την Τέχνη, σχεδιάσθηκε και υλοποιήθηκε ένα ταξίδι για μαθητές και εκπαιδευτικούς σε μία δύσκολη αλλά συνάμα γοητευτική πλευρά της επιστήμης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *fractal, μαθηματικά, τέχνη*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα "*Τέχνη και Μαθηματικά*" του *Μουσείου Ηρακλειδών* στο Θησείο, στοχεύει στην αναζήτηση των σημείων όπου συναντώνται και αλληλοεπηρεάζονται οι δυο αυτοί τομείς της ανθρώπινης σκέψης και έκφρασης. Μέσα στο ευχάριστο περιβάλλον της Τέχνης γίνεται ένα ταξίδι από την ομορφιά και την αισθητική της Τέχνης στη λογική των Μαθηματικών. Μια αρχική ιδέα για την *«Τέχνη των Μαθηματικών και τα Μαθηματικά της Τέχνης»*, προτάθηκε στο έργο *«Ιρις»* (το οποίο είχε υλοποιηθεί στο πλαίσιο ερευνητικού προγράμματος του Υπουργείου Παιδείας, Κωτσάνης κ.α., 2000).

Με αφορμή κατάλληλα επιλεγμένα έργα των M. C. Escher και V. Vasarely αλλά και άλλων καλλιτεχνών, διαδραστικούς πίνακες, κατάλληλα σχεδιασμένο πολυμεσικό υλικό και αλληλεπιδραστικές δραστηριότητες, οι μαθητές εισάγονται αβίαστα στη φύση και κυρίως στη φιλοσοφία σημαντικών μαθηματικών εννοιών. Τον κεντρικό άξονα της θεματικής ενότητας, αποτελεί η εξερεύνηση του κόσμου των fractals μέσα από την αναζήτηση της αισθητικής και της δομής επιλεγμένων φυσικών αντικειμένων καθώς και των νόμων που διέπουν τη γεωμετρία της φύσης. Η απλότητα των γεωμετρικών σχημάτων γίνεται εργαλείο κατανόησης της πολυπλοκότητας του φυσικού κόσμου και της μοντέρνας τέχνης, σ' ένα ακόμη βήμα της προσπάθειας του ανθρώπου για την αποκρυπτογράφηση των μυστικών του σύμπαντος.

Ο σχεδιασμός του προτεινόμενου εκπαιδευτικού σεναρίου, στηρίζεται στη μάθηση βασισμένη στο παιχνίδι (*game-based learning, GBL*) και εστιάζει στην ενεργητική μάθηση (*active learning*), την ευέλικτη γνώση (*flexible knowledge*) και την ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων (*problem solving*). Τα παιχνίδια - ελκυστικά από τη φύση τους λόγω της διασκέδασης που προσφέρουν - οδηγούν τους μαθητές μέσω των κανόνων και των στόχων τους σε μία φυσική διαδικασία μάθησης. Η μεθοδολογία του εκπαιδευτικού σεναρίου βασίζεται στην ανακαλυπτική θεωρία μάθησης (*discovery learning*), όπου οι μαθητές δρουν με συγκεκριμένα αντικείμενα του παιχνιδιού ανακαλύπτοντας οι ίδιοι τη γνώση (Κόμης, 2004), ενεργοποιούν την εξερεύνηση και τον πειραματισμό και ενισχύουν την εμπέδωση των γνώσεων που αποκτώνται.

Βασικός στόχος του προγράμματος είναι η εξοικείωση με σύνθετες έννοιες των μαθηματικών και της πληροφορικής μέσα από παιχνίδια με απλούς κανόνες, στο γόνιμο έδαφος που προσφέρουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις διάφορων μορφών τέχνης. Ειδικότερα, κάθε ένα από τα τέσσερα παιχνίδια του εκπαιδευτικού σεναρίου, αντιστοιχεί στους παρακάτω εκπαιδευτικούς στόχους:

- εξοικείωση των μαθητών με την έννοια της αυτοομοιότητας και της αναδρομής κατά τη διαδικασία σχεδιασμού αλγορίθμων και αναγνώριση αυτοόμοιων μοτίβων στη φύση και στα έργα του M. C. Escher και V. Vasarely, εισαγωγή με φυσικό τρόπο στην έννοια του ορίου,
- κατανόηση των επαναληπτικών μεθόδων που η δυναμική της κατασκευής των fractal προϋποθέτει, και των αλγοριθμικών διαδικασιών που χαρακτηρίζουν την κατασκευή τους,
- εισαγωγή στην έννοια της κλασματικής διάστασης μέσω του υπολογισμού της διάστασης του τριγώνου του Sierpinski, με απλές μεθόδους,
- προσδιορισμός του ρόλου της τύχης αφενός και των ντετερμινιστικών κανόνων αφετέρου, κατά τη διάρκεια σχηματισμού ενός fractal στο "Chaos game" και αναζήτηση της σύνδεσης τεχνικής και αποτελέσματος στους πίνακες του J. Pollock.

Οι έννοιες οικοδομούνται στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μέσα από τις ποικιλόμορφες αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθητών καθώς και με τα ψηφιακά εργαλεία (*mind tools*). Οι εκπαιδευτικές εφαρμογές που υποστηρίζουν την οικοδόμηση της γνώσης, επιτρέπουν διερευνήσεις, υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω πράξης, προσομοιώνοντας πραγματικά προβλήματα και καταστάσεις και αποτελώντας νοητικούς συνεργάτες (Jonassen, 1996). Ο διάλογος (*discourse*) καθιστά εφικτή τη συμμετοχή των μαθητών και τη διαπραγμάτευση εννοιών στο πλαίσιο της κοινότητας, δίνοντας έμφαση στις αναπτυσσόμενες κοινωνικές αλληλεπιδράσεις (Lave & Wenger, 1991).

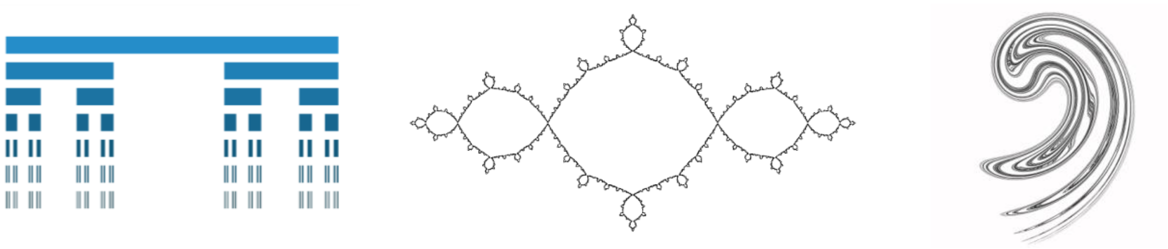
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

«Γιατί η γεωμετρία συχνά περιγράφεται ως ψυχρή και άνυδρη; Ένας λόγος είναι η ανεπάρκειά της να περιγράψει το σχήμα του σύννεφου, του βουνού, της ακτογραμμής ή ενός δένδρου. Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα δένδρα δεν είναι κώνοι, οι ακτογραμμές δεν είναι κύκλοι και το γαύγισμα δεν είναι ομαλό, ούτε η αστραπή ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή». (Mandelbrot, 1983).

Fractals

Ο όρος "fractal" (στα ελληνικά μορφόκλασμα ή μορφοκλασματικό σύνολο) προέρχεται από τη λατινική λέξη *fractus* και το ρήμα *frangere*, που σημαίνει σπάω σε μη-κανονικά κομμάτια. Ο όρος αυτός επινοήθηκε από τον B. Mandelbrot το 1975, για να περιγράψει μια οικογένεια «*παθολογικών»* συνόλων (Mandelbrot, 1983) που ήρθαν στο φως με τα μαθηματικά του 20^{ού} αιώνα, αναζητώντας την οντολογία και τα όρια θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών (όπως *καμπύλη* ή *συνέχεια*), αλλά αδύνατο να περιγραφούν από τις γεωμετρικές δομές της Ευκλείδιας Γεωμετρίας. Σύμφωνα με τον Mandelbrot, τα πιο ενδιαφέροντα σύνολα fractal συνδέονται άρρηκτα με την έννοια της *τύχης* αφού οι κανονικότητες και οι μη-κανονικότητές τους είναι πιθανοτικές. Επιπλέον, τα fractals έχουν την ιδιότητα της *αυτοομοιότητας*, επαναλαμβάνονται δηλαδή αυτούσια σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης. Βασικό στοιχείο επίσης της μελέτης των fractals αποτελεί η έννοια της διάστασης Hausdorff (κλασματική διάσταση). Τέλος, ο Mandelbrot στο βιβλίο του «The Fractal Geometry of Nature», προσδιορίζει κάποια κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ των fractals και σχηματισμών που μπορεί κανείς να συναντήσει στη φύση.

Η αναλυτική μαθηματική τεκμηρίωση όλων των θεωρημάτων και ιδιοτήτων των fractals που αναφέρονται στο σενάριο αυτό, υπερβαίνει τους στόχους του συγκεκριμένου άρθρου, συνεπώς στο κεφάλαιο αυτό θα διασαφηνίσουμε μόνο ορισμένα τμήματα της μορφοκλασματικής θεωρίας, απαραίτητα για τη συνολική κατανόηση των δραστηριοτήτων που προτείνονται.



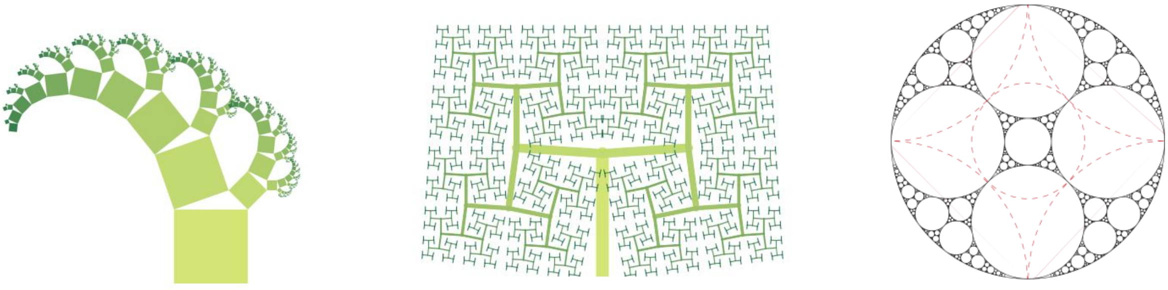
Σχήμα 1: *Μερικά σύνολα fractal είναι καμπύλες ή επιφάνειες, άλλα "σκόνη" και κάποια άλλα είναι τόσο ιδιόμορφα που δεν μπορεί κανείς να τα περιγράψει με όρους ούτε των μαθηματικών ούτε της τέχνης. (http://andrew-hoyer.com/andrewhoyer/experiments/fractals/, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)*

Αυτοομοιότητα και αναδρομή

Οι εννοιολογικές ρίζες του όρου *αυτοομοιότητα*, βρίσκονται στη σύνδεση μεταξύ των θεμελιακών εννοιών της Ευκλείδιας Γεωμετρίας (σημείο, γραμμή, επίπεδο, χώρος), με την «ομογένεια», που αποτελεί επιθυμητό χαρακτηριστικό κάθε απλής φυσικής κατανομής ποσοτήτων (όπως πυκνότητα, θερμοκρασία, πίεση, ταχύτητα). Η ομογενής κατανομή κάθε ευθείας γραμμής, επιπέδου, ή χώρου, έχει τις εξής ιδιότητες: παραμένει αμετάβλητη κατά τη *μεταφορά* (*displacement*) και κατά την *αλλαγή κλίμακας* (*scaling*). Πράγματι, η πρώτη από τις δύο αυτές ιδιότητες εκφράζεται στη μορφοκλασματική θεωρία μέσω τις πιθανοτικής φύσης των fractal (*superposable in statistical sense*), ενώ η δεύτερη οδηγεί μέσω των μετασχηματισμών υπό αλλαγή κλίμακας (*scaling*) στην αυτοομοιότητα (*self-similarity*) (Peitgen et al., 1992). Η αυτοομοιότητα περιγράφει την ιδιότητα ενός σχήματος να είναι όμοιο με ένα ή περισσότερα τμήματά του. Ισοδύναμα, μία δομή θα καλείται αυτοόμοια αν μπορεί να διαχωριστεί σε τμήματα (τα *μέρη*), καθένα από τα οποία είναι όμοιο με την αρχική δομή (το *όλον*).

Επιπλέον, η έννοια της αυτοομοιότητας συνδέεται άρρηκτα με την υπολογιστική έννοια της *αναδρομής*, όπως χρησιμοποιείται σήμερα από την επιστήμη της πληροφορικής κατά το σχεδιασμό αλγορίθμων: της μεθόδου δηλ. σύμφωνα με την οποία η επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται από λύσεις επιμέρους προβλημάτων (υπο-προβλήματα) που αποτελούν υπο-στιγμιότυπα του αρχικού προβλήματος (Cormen et al., 1990).

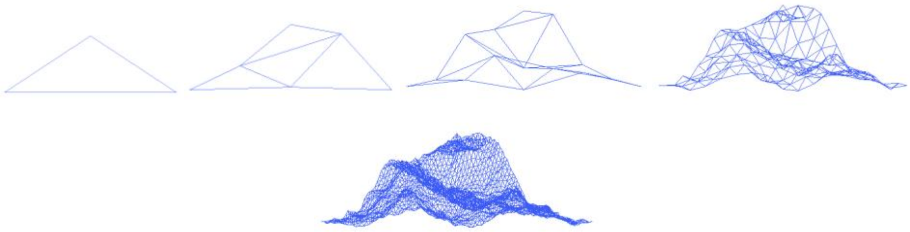
Τέλος, αξίζει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η έννοια της αυτοομοιότητας δεν αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να χαρακτηριστεί ένα σύνολο ως fractal, καθώς κάθε αυτοόμοιο σύνολο με την ιδιότητα της αυτοομοιότητας δεν αποτελεί σύνολο fractal.



Σχήμα 2: *Αυτοομοιότητα. (http://andrew-hoyer.com/andrewhoyer/experiments/fractals/, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)*

Επανάληψη και πολυπλοκότητα

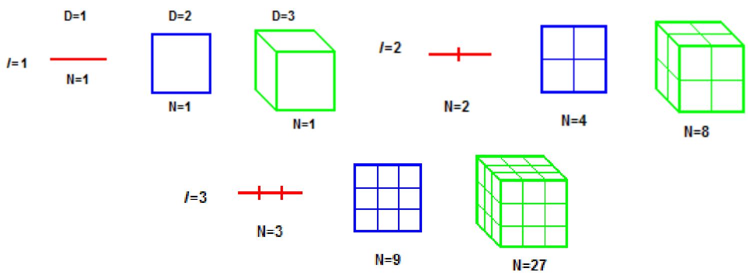
Η έννοιας της επανάληψης (*iteration*), αποτελεί ένα ακόμη βασικό χαρακτηριστικό της διαδικασίας κατασκευής των fractals του παρόντος σεναρίου, αλλά και απαραίτητο εργαλείο (ως βασική δομή) του σχεδιασμού αλλά και της ανάλυσης πολυπλοκότητας (*complexity*) των αλγορίθμων. Η επαναληπτική διαδικασία αποτελεί θεμέλιο λίθο της γραφικής απεικόνισης φυσικών δομών (Russ, 1994) όπως και των fractals στα οποία περιηγούνται οι μαθητές (Barnsley, 1993). Παράλληλα, αποτελεί μέσο για την αποδέσμευση της αντίληψής μας από τη στατικότητα των μορφοκλασματικών, και την επανασύνδεσή τους με τις δυναμικές διαδικασίες που συντελούν στη δημιουργία τους (Peitgen et al., 1992).



Σχήμα 3: *Fractal που μοντελοποιεί την επιφάνεια ενός βουνού. (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Animated_fractal_mountain.gif)*

Διαστάσεις

Η έννοια της *διάστασης*, απασχόλησε πληθώρα μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα, όπως οι H. Poincaré, H. Lebesgue, L.E. Brower, G. Cantor, G. Peano και D. Hilbert και είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις πρώτες ανακαλύψεις στα fractals. Σύμφωνα με το γνωστό παράδοξο της μέτρησης του μήκους της ακτογραμμής της Μ. Βρετανίας, μπορεί κάποιος να διαπιστώσει πως ο *κλασικός* ορισμός της *μέτρησης* δεν οδηγεί πάντα στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αναλυτικότερα, η επίλυση του προβλήματος αυτού απαιτεί τη διατύπωση ενός νόμου που θα συνδέει το μήκος (*length*) με την κλίμακα (*scale*) του προς εξέταση αντικειμένου. Ένας αντίστοιχος νόμος θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος για τη δραστηριότητα αυτή στην προσπάθεια προσέγγισης της έννοιας *διάσταση* (*dimension*), έννοιας για την οποία οι μαθηματικοί έχουν ήδη διατυπώσει δέκα διαφορετικές *ερμηνείες* (topological, Hausdorff, fractal, self-similarity, box-counting, capacity, information, euclidean, κ.α.). Ακριβώς αυτή η σύνδεση μεταξύ μήκους και κλίμακας, θα οδηγήσει τους μαθητές σε έναν απλό τρόπο προσδιορισμού της (μη ακέραιας) *self-similarity dimension* του τριγώνου του Sierpinski, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζεται με τη *Hausdorff dimension* του fractal αυτού (Falconer, 1990).



Σχήμα 4: *Διαδικασία προσδιορισμού της fractal διάστασης. (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fractaldimensionexample.PNG)*

Τύχη και πιθανότητες

Το "Chaos game" αποτελεί ένα στιγμιότυπο μια οικογένειας παιχνιδιών που στοχεύουν στην ανατροπή της ιδέας που διαισθητικά έχουν σχηματίσει οι μαθητές ως προς το ρόλο της τύχης σε ένα *πείραμα*. Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει στους μαθητές ένα πραγματικό πρόβλημα, στο πλαίσιο του οποίου η φαινομενικά *τυχαία* κατανομή σημείων (λόγω του συσχετισμού της μεθόδου επιλογής σημείων με τη ρίψη ενός ζαριού) οδηγεί σε ένα σαφώς μη τυχαίο αποτέλεσμα, με συγκεκριμένη δομή. Ακολουθώντας σημείο προς σημείο την κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski, παρατηρούμε πώς η τυχαιότητα (*randomness*) δημιουργεί τελικά ένα ντετερμινιστικό (*deterministic*) σχήμα. Ισοδύναμα είμαστε σε θέση να προβλέψουμε με βεβαιότητα το *τελικό σχήμα*, παρότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη θέση του εκάστοτε *επόμενου* σημείου (Peitgen et al., 1992), αφού εξαρτάται από ένα... ζάρι.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το παρόν εκπαιδευτικό σενάριο αποτελείται από *δύο αυτόνομες ενότητες δραστηριοτήτων*, η κάθε μία εκ των οποίων αναπτύσσεται σε τέσσερα διακριτά στάδια. Η πρώτη ενότητα δραστηριοτήτων διαρκεί σαράντα λεπτά, ενώ η δεύτερη μία ώρα και δέκα λεπτά. Ακολουθεί αξιολόγηση του προγράμματος από μαθητές και εκπαιδευτικούς διάρκειας δέκα λεπτών.

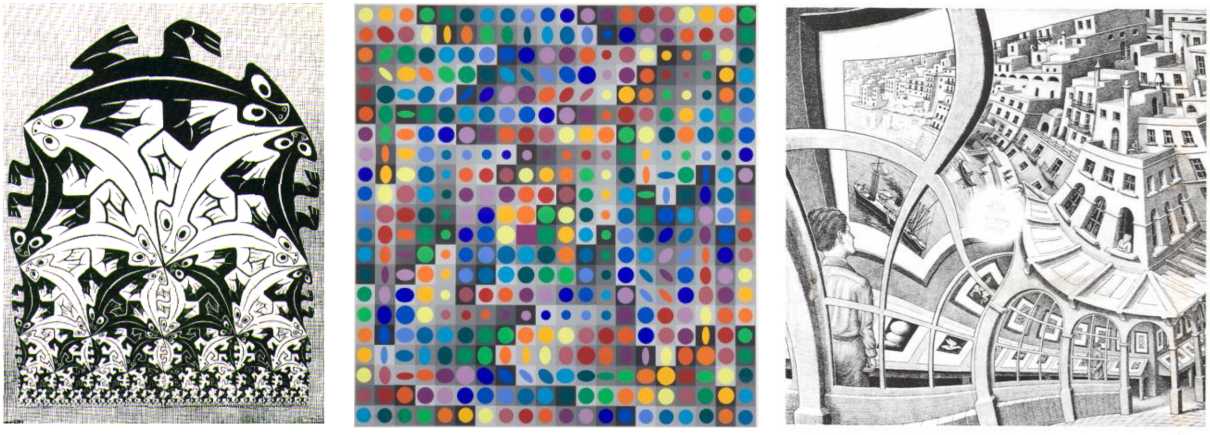
Α΄ ενότητα δραστηριοτήτων

Η πρώτη ενότητα του σεναρίου είναι εισαγωγική, αναπτύσσεται με τη μορφή διαλόγου, θέτει ερωτήματα με αφορμή την αλληλεπίδραση των μαθητών με τους εικαστικούς πίνακες του μουσείου και παρέχει το κίνητρο ενασχόλησής τους με το εκπαιδευτικό σενάριο.

- ***Περιήγηση στο μουσείο: M.C.Escher και V.Vasarely***

Η ενότητα αυτή, ξεκινά με έναν καταιγισμό ιδεών (brainstorming) αναζήτησης πιθανών σχέσεων «*Τέχνης και Μαθηματικών*». Οι μαθητές ενθαρρύνονται να διατυπώσουν τις ιδέες και τις εμπειρίες τους, που αφορούν στη σύνδεση ή μη μεταξύ των δύο αυτών ανθρώπινων ενεργημάτων. Με τον τρόπο αυτό, αφενός αναδεικνύονται οι πρότερες γνώσεις και αναπαραστάσεις των μαθητών και αφετέρου προσδιορίζεται η μαθησιακή τους ετοιμότητα στην προσέγγιση των στόχων του παρόντος σεναρίου. Η ανατροφοδότηση αυτή, σε συνδυασμό με την ευελιξία της δομής του σεναρίου, αποτελεί τον «οδηγό» του εκπαιδευτικού στον προσδιορισμό του βαθμού εμβάθυνσης στις έννοιες αλλά και στο *χαρακτήρα* που θα προσδώσει τελικά στο σενάριο (έμφαση σε θεωρητικές-εφαρμοσμένες πτυχές).

Ακολουθεί περιήγηση των μαθητών στους εκθεσιακούς χώρους του μουσείου. Παρατηρώντας επιλεγμένους πίνακες του M.C. Escher και του V. Vasarely, οι μαθητές παρακινούνται να εντοπίσουν γεωμετρικά μοτίβα και αυτοόμοια σχέδια, ενώ παράλληλα έρχονται αντιμέτωποι με τις έννοιες της επανάληψης και της αυτοομοιότητας, τις οποίες καλούνται να διακρίνουν, να προσδιορίσουν και να κατανοήσουν μέσω της εικαστικής γλώσσας αλλά και παραδειγμάτων από την καθημερινή τους ζωή.



Σχήμα 5: *Έργα των M.C.Escher και V.Vasarely.*

- ***Ο Pollock και τα fractal***

Στη συνέχεια, οι μαθητές οδηγούνται στις διδακτικές αίθουσες, όπου παρακολουθούν ένα βίντεο διάρκειας τριών λεπτών από την ταινία "Pollock" *(Ed Harris, 2000)*. Στο χαρακτηριστικό αυτό απόσπασμα, αποτυπώνεται με ιδιαίτερο τρόπο, το πώς η ηγετική μορφή της ιστορίας του αφηρημένου εξπρεσσιονισμού ανακαλύπτει μια ριζοσπαστική τεχνική, την τεχνική του “dripping” (ριψίματος - σταξίματος) με την οποία τελικά θα μετουσιώσει τη ζωγραφική σε παράσταση αλλά και τον ίδιο σε έναν από τους σπουδαιότερους ζωγράφους της σύγχρονης τέχνης. Παράλληλα με την γνωστική αμηχανία που δημιουργεί στους μαθητές η τεχνική αυτή, οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναζητήσουν τις έννοιες που προαναφέρθηκαν στις εικαστικές δημιουργίες του Pollock. Επιπλέον, διερωτώνται για την τυχαιότητα των κινήσεων του Pollock και την ενδεχόμενη δυνατότητα ή αδυναμία *πρόβλεψης* του εικαστικού αποτελέσματος στο οποίο θα οδηγήσει η τεχνική αυτή, όχι μόνο από τον *ίδιο το ζωγράφο* αλλά και από έναν *εξωτερικό παρατηρητή*.

Σχήμα 6: *O Jackson Pollock και η τεχνική “dripping”*

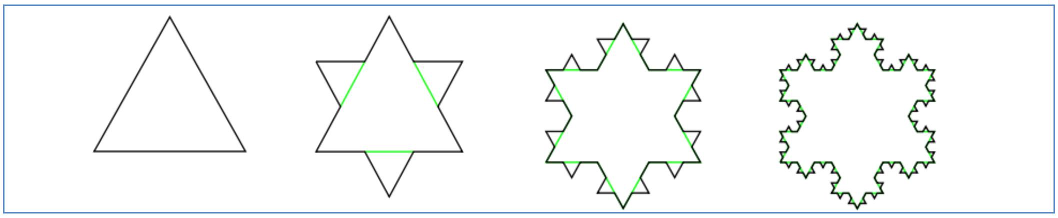
- ***Από την αισθητική της τέχνης στην αισθητική της φύσης***

Την αναζήτηση των δομών της αισθητικής της τέχνης, ακολουθεί η μελέτη της αισθητικής των φυσικών μοτίβων, καθώς οι μαθητές παρακινούνται να εντοπίσουν αυτοόμοιες μορφές σε επιλεγμένες φωτογραφίες φυσικών σχηματισμών. Επιπλέον, δίνεται έμφαση στην ανεπάρκεια της απλής παράθεσης γεωμετρικών σχημάτων για την *ανάλυση* των φυσικών μορφών που παρατήρησαν, καθώς και στο σημαντικό ρόλο της αυτοομοιότητας ως εγγενούς χαρακτηριστικού της αρχιτεκτονικής της φύσης.

Σχήμα 7: *Fractasl στη φύση*

- ***Από την πολυπλοκότητα της φύσης στην αφαίρεση των μαθηματικών***

Την πολυπλοκότητα των φυσικών μορφών διαδέχεται η απλότητα των πρώτων βημάτων της κατασκευής μαθηματικών fractal. Μέσω της επανάληψης απλών γεωμετρικών κανόνων οι μαθητές αφομοιώνουν τη διαδικασία κατασκευής ενός fractal. Με χρήση αντίστοιχης παρουσίασης διαφανειών, εισάγονται βήμα προς βήμα στη διαδικασία κατασκευής του πρώτου fractal της ενότητας, της *χιονονιφάδας του Koch*. Αφού εξοικειωθούν με την *επαναληπτικότητα* που διέπει την κατασκευή της *χιονονιφάδας*, έρχονται αντιμέτωποι με την έννοια του *απείρου*. Ανακαλύπτουν την αδυναμία της ολοκλήρωσης της κατασκευής του fractal στα πλαίσια της εν λόγω παρουσίασης, εξαιτίας της Αριστοτελικής «ενεργεία» φύσης του απείρου που προϋποθέτει η *ολοκλήρωση* της κατασκευής του. Καθώς πλέον έχει επιτευχθεί η εξοικείωση των μαθητών με τις βασικές έννοιες, ξεκινά η εφαρμογή του κυρίως εκπαιδευτικού σεναρίου.



Σχήμα 8: *Η Χιονονιφάδα του Koch*

Β΄ ενότητα δραστηριοτήτων

Η δεύτερη ενότητα αποτελείται από τέσσερα εκπαιδευτικά παιχνίδια που συνοδεύονται από τρεις διαδραστικές εφαρμογές καθώς και μία δραστηριότητα κατασκευής από χαρτί. Καθένα από τα τέσσερα αυτά παιχνίδια, στοχεύει στην κατανόηση μίας έννοιας, άρρηκτα συνδεδεμένης με τους κανόνες που διέπουν την κατασκευή των fractals ή τα βασικότερα χαρακτηριστικά της δομής τους:

- αυτοομοιότητα
- επανάληψη & πολυπλοκότητα
- κλασματική διάσταση
- τύχη

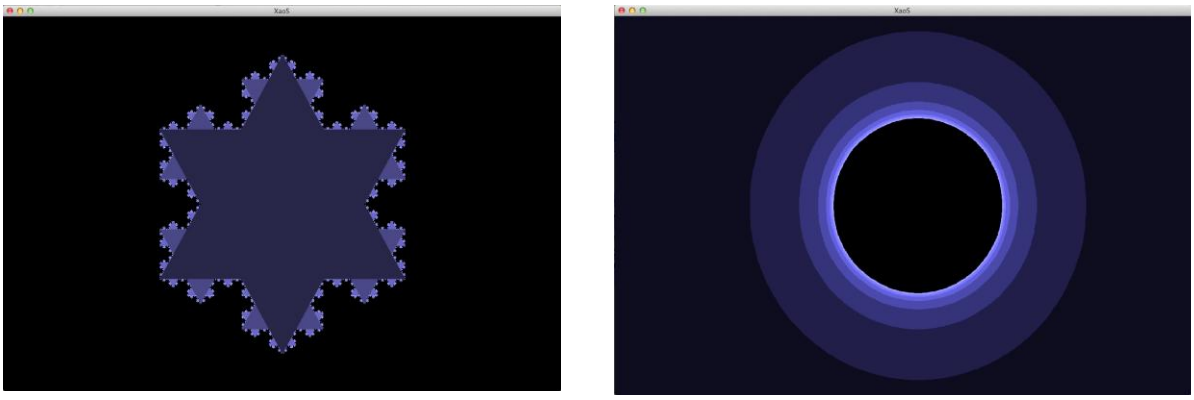
Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι ο προτεινόμενος σχεδιασμός του εκπαιδευτικού σεναρίου, καθώς και η λειτουργικότητα των τριών επιλεγμένων εκπαιδευτικών εφαρμογών, επιτρέπει τη διεξαγωγή του σεναρίου με τη χρήση διαδραστικού πίνακα. Ένα από τα βασικότερα κριτήρια επιλογής των εφαρμογών που χρησιμοποιήθηκαν, ήταν η ευκολία χρήσης τους, που οφείλεται στην απλότητα των λειτουργιών τους. Η εξοικείωση των μαθητών με τις εφαρμογές δεν αποτελεί προϋπόθεση του παρόντος σεναρίου και η αλληλεπίδρασή τους με αυτές περιλαμβάνει εξ ολοκλήρου λειτουργίες απλής επιλογής στοιχείων ή περιήγησης στο περιβάλλον της εφαρμογής καθώς και λειτουργίες τύπου “*drag & drop”*. Οι μαθητές μπορούν με τη βοήθεια του διαδραστικού πίνακα να περιπλανηθούν στα πιο διάσημα fractals, να υπολογίσουν την κλασματική διάσταση του τριγώνου του Sierpinski με χρήση σφραγίδων (*stamps*) και να παρατηρήσουν σε πραγματικές συνθήκες τον τρόπο με τον οποίο τα φαινομενικά τυχαία σημεία οδηγούν στο σχηματισμό ενός fractal.

Η ενότητα Β΄ συνοδεύεται από αντίστοιχο φύλλο εργασίας, το οποίο είναι απαραίτητο για την διεξαγωγή των παιχνιδιών και την επίτευξη των ζητούμενων στόχων του παρόντος σεναρίου.

- ***Η χιονονιφάδα του Koch και η αυτοομοιότητα***

Στο πρώτο εκπαιδευτικό παιχνίδι, οι μαθητές, αξιοποιούν την εφαρμογή "XaoS" (λογισμικό ελεύθερου κώδικα - συμβατό με όλα τα λειτουργικά συστήματα, *http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php*), μέσω της οποίας αποκτούν μία οπτική αναπαράσταση της *χιονονιφάδας του Koch*. Μέσω του διαδραστικού πίνακα, ξεκινούν μια *περιπλάνηση* στο fractal αυτό και εντοπίζουν τις περιοχές αυτοομοιότητας. Παράλληλα, δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι η εφαρμογή αυτή δεν εκτυπώνει στην οθόνη τα *άπειρα* βήματα κατασκευής του fractal αλλά χρησιμοποιεί τη μαθηματική περιγραφή του (μέσω μιας μαθηματικής εξίσωσης), ώστε να μας εξασφαλίσει την αναδημιουργία του fractal σε κάθε *βήμα* της μεγέθυνσης. Με τον τρόπο αυτό μας δημιουργεί την *ψευδαίσθηση* του fractal στην *τελική* του μορφή.

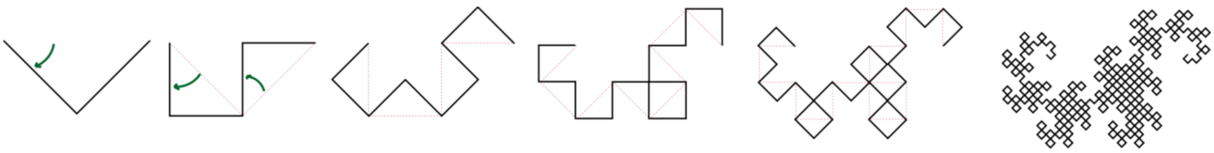
Στη συνέχεια, μέσω της εφαρμογής "XaoS" δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να περιπλανηθούν στον γνωστό τους ευκλείδειο *κύκλο* ώστε να διαπιστώσουν την απουσία αυτοομοιότητας και να εισαχθούν με φυσικό τρόπο στην έννοια του ορίου. Ο κύκλος είναι ευκλείδειο αντικείμενο, που σημαίνει ότι ένα τόξο-τμήμα του σε αλεπάλληλες μεγεθύνσεις εμφανίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα, σε αντίθεση με το fractal σχήμα που διατηρεί τη δομή του. (Άλλωστε αυτή είναι και η ουσία της εύρεσης του μήκους μιας γενικότερα ευκλείδειας καμπύλης μέσω του διαφορισμού και ολοκλήρωσής της. Το μήκος μιας διαφορίσιμης καμπύλης βρίσκεται ως άθροισμα απείρων ευθυγράμμων τμημάτων, ενώ μια fractal καμπύλη δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη). Επι τούτοις, οι μαθητές καλούνται να διαπιστώσουν το *παράδοξο* άπειρο μήκος της χιονονιφάδας, σε σχέση με το πεπερασμένο μήκος του κύκλου εντός του οποίου δύναται να εγγραφεί. Στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας, οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν με συντομία τις διαφορές που εντόπισαν μεταξύ της *χιονονιφάδας του Koch* και του *κύκλου*, δίνοντας έμφαση στις έννοιες της επανάληψης και πολυπλοκότητας, της αυτοομοιότητας καθώς και της άπειρης ή πεπερασμένης (αντίστοιχα) περιμέτρου των δύο σχημάτων.



Σχήμα 9: *Περιπλάνηση με την εφαρμογή "XaoS"*

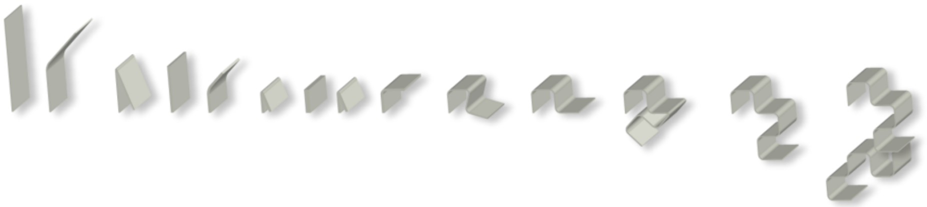
- ***Η καμπύλη του Δράκου και οι αλγόριθμοι***

Οι μαθητές εισάγονται μεθοδικά στα πρώτα βήματα της κατασκευής του fractal της *καμπύλης του Δράκου*, χρησιμοποιώντας ένα μολύβι και μία λωρίδα χαρτιού. Καλούνται να *μεταφράσουν* τα πρώτα βήματα του fractal (που ξεκινούν να κατασκευάζουν με τα χέρια τους), σε μία συμβολοσειρά του δυαδικού συστήματος σύμφωνα με μια μέθοδο που αντιστοιχίζει τα βήματα της κατασκευής των χεριών τους σε κώδικα γραμμάτων της ελληνικής γλώσσας. Καθώς παρακινούνται να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας, ανακαλύπτουν τον κανόνα με τον οποίον παράγεται η έγκυρη *συμβολοακολουθία του δράκου* και εισάγονται στην έννοια του αλγορίθμου και παράλληλα στη μέθοδο κωδικοποίησης της επαναληπτικής διαδικασίας κατασκευής ενός fractal σε μία *φυσική γλώσσα*. Επιπλέον, δίνεται ως παράδειγμα στους μαθητές η αναλογία μεταξύ της κωδικοποίησης της καμπύλης του δράκου και της προσπάθειας μετάφρασης του γενετικού κώδικα των κυττάρων των έμβιων όντων του πλανήτη μας.

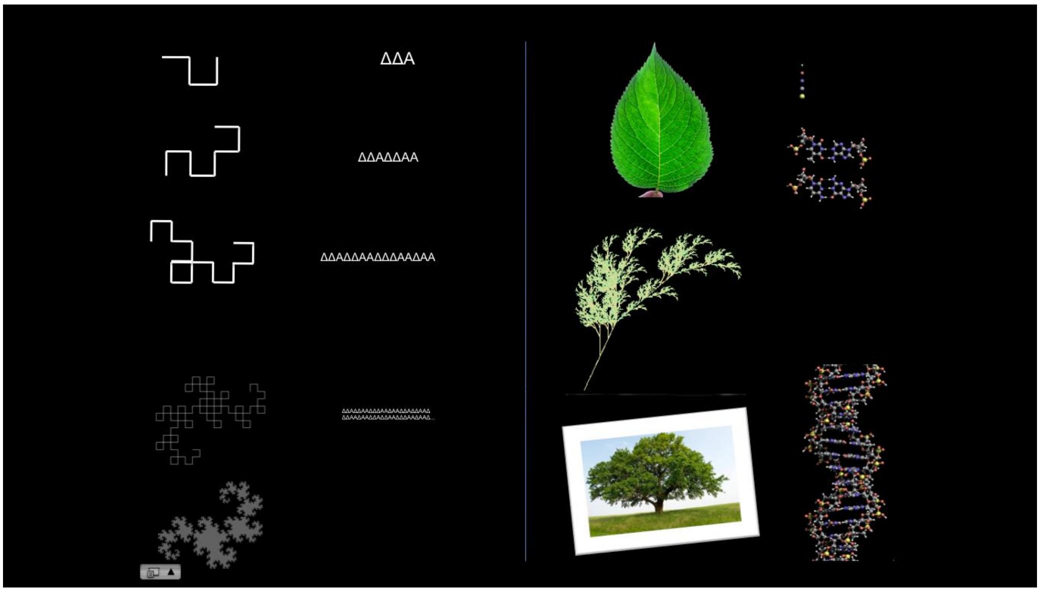


Δ ΔΔΑ ΔΔΑΔΔΑΑ ......

Σχήμα 10: *Η καμπύλη του Δράκου: κατασκευή και κωδικοποίηση*



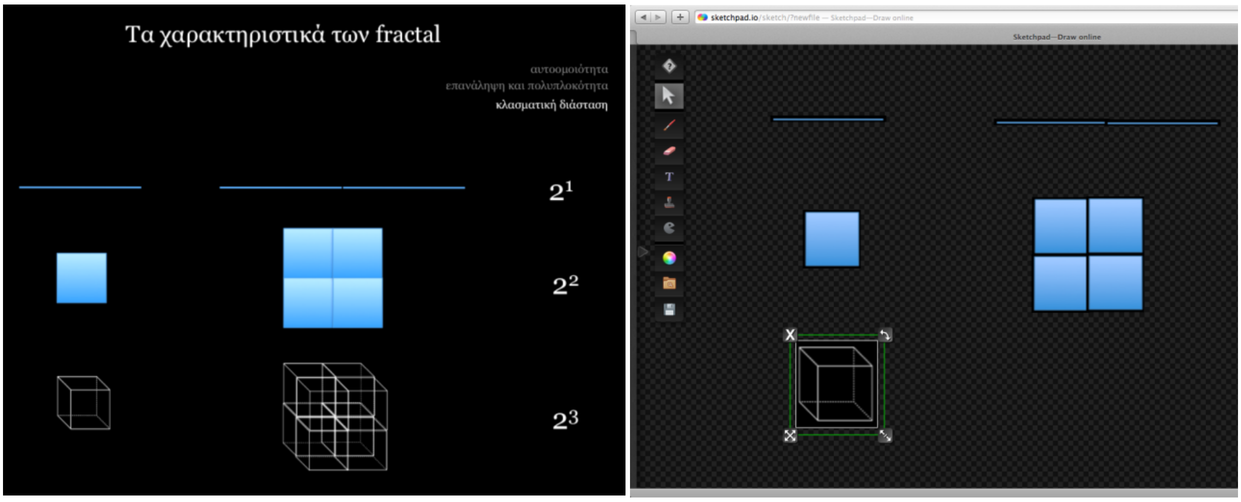
Σχήμα 11: *Η καμπύλη του Δράκου: κατασκευή με μια λωρίδα χαρτί*



Σχήμα 12: *Η καμπύλη του Δράκου και η αναλογία της με φυσικές μορφές*

- ***Το τρίγωνο του Sierpinski και οι διαστάσεις***

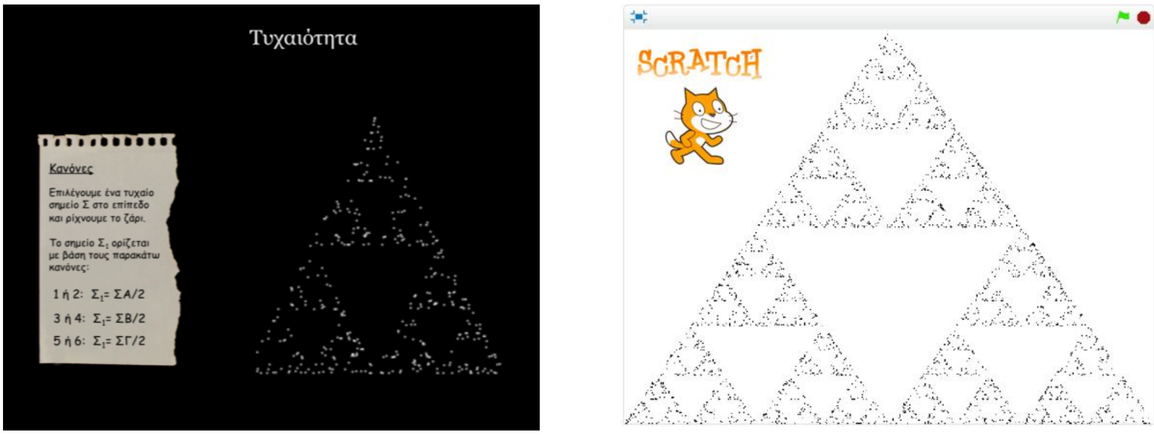
Το τρίτο παιχνίδι που στοχεύει στην εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της κλασματικής διάστασης, ξεκινά με την περιγραφή των πρώτων βημάτων κατασκευής του *τριγώνου του Sierpinski*. Οι μαθητές, αφού εξοικειωθούν με το τρίτο αυτό fractal του σεναρίου, παρακινούνται να υπολογίσουν μέσα από ένα παιχνίδι τις διαστάσεις του. Με έναυσμα ένα σύντομο διάλογο *Πλατωνικού* ύφους, το παιχνίδι αυτό ξεκινά με στόχο να καταρρίψει την αναμενόμενη πεποίθηση των μαθητών, περί της δισδιάστατης φύσης του *Τριγώνου του Sierpinski*. Οι μαθητές καλούνται μέσω της εφαρμογής "Sketchpad.io" (on-line εφαρμογή, *http://sketchpad.io/sketch/*), ή οποιασδήποτε άλλης εφαρμογής σχεδίου με δυνατότητα δημιουργίας και διπλασιασμού σφραγίδων, να οδηγηθούν σε μία απλή μαθηματική εξίσωση, η προσεγγιστική επίλυση της οποίας θα αποκαλύψει τη *μη ακέραια* φύση της διάστασης του *Τριγώνου του Sierpinski*.



Σχήμα 13: *Υπολογισμός της διάστασης του τριγώνου του Sierpinski και η εφαρμογή 'Sketchpad.io'.*

- **Το Παιχνίδι της Τύχης**

Στο τέταρτο και τελευταίο παιχνίδι, οι μαθητές καλούνται να αναρωτηθούν τι διαφοροποιεί τα φυσικά αντικείμενα που διερεύνησαν στην *Α΄ ενότητα δραστηριοτήτων* σε σχέση με τους απόλυτα δομημένους μαθηματικούς σχηματισμούς (fractals) που επεξεργάστηκαν στις προηγούμενες δραστηριότητες. Εισάγονται στην έννοια της τύχης και της πιθανότητας και εμπλέκονται σε διάλογο που αφορά το ρόλο της τύχης στην εξέλιξη και στην ανάπτυξη των έμβιων όντων μέσα από οικεία καθημερινά παραδείγματα. Το γνωστό "Chaos Game", υλοποιημένο στην εφαρμογή Scratch (λογισμικό ελεύθερου κώδικα - συμβατό με όλα τα λειτουργικά συστήματα, *http://scratch.mit.edu*), παρακινεί τους μαθητές να προσδιορίσουν το ρόλο του παράγοντα *«τύχη»* σε πειράματα πεπερασμένης και άπειρης διάρκειας καθώς και το ρόλο των κανόνων στη διαμόρφωση του αποτελέσματος. Αντιπαραβάλλεται η δυνατότητα εφαρμογής άπειρων επαναληπτικών βημάτων κατά την κατασκευή των fractals με το πεπερασμένο της θνητής φύσης των έμβιων όντων.

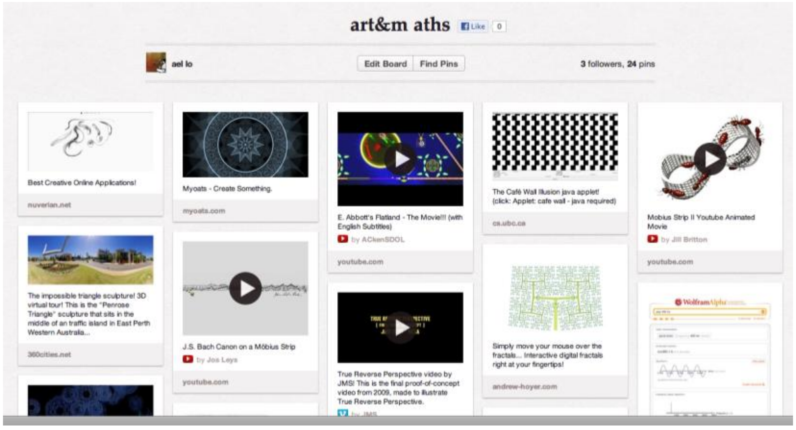


Σχήμα 14: *Το 'Chaos Game' και η εφαρμογή 'Scratch'*

- ***Περαιτέρω διερεύνηση***

Τέλος, ως ερέθισμα για περαιτέρω διερεύνηση, τίθεται στους μαθητές για μία ακόμη φορά το ερώτημα σχετικά με το *βαθμό τυχαιότητας* που διέπει την τεχνική '*dripping*' του Pollock. Το ερώτημα αυτό, διανθίζεται πλέον με την αναλογία που συνδέει τους ενδεχόμενους κανόνες που διέπουν την τεχνική ρίψης χρώματος από το χέρι του Pollock με τους κανόνες του 'Chaos Game' οι οποίοι τελικά καταφέρνουν να προσδιορίσουν τη μορφή του αποτελέσματος του παιχνιδιού. Διερωτώνται αν θα μπορούσε να συμβαίνει το ίδιο και με τους πίνακες του Pollock. Το *ανοιχτό* αυτό ερώτημα, που αναδεικνύεται από τις σύγχρονες απόπειρες εξακρίβωσης της γνησιότητας των έργων του Pollock μέσω στοιχείων της μορφοκλασματικής θεωρίας (Taylor et al., 2007, 2008), αποσκοπεί στην αναμέτρηση των μαθητών όχι μόνο με τα όρια της επιστήμης αλλά και με τα πιθανά εμπόδια που ένας επιστήμονας καλείται να ξεπεράσει.

Το εκπαιδευτικό σενάριο ολοκληρώνεται με την αξιολόγηση του προγράμματος από τους μαθητές και τους συνοδούς καθηγητές, σχετική με τις εντυπώσεις και τις παρατηρήσεις τους. Επιπλέον, δίνονται ποικίλες διαδικτυακές πηγές που περιλαμβάνουν όλες τις διασυνδέσεις προς τις σελίδες καθώς και τις εφαρμογές που χρησιμοποιήθηκαν.



Σχήμα 15: *Links στο Pinterest (http://pinterest.com/aellomusica/art-m-aths/)*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά από την εφαρμογή του εκπαιδευτικού αυτού προγράμματος στο Μουσείο Ηρακλειδών, η ομάδα σχεδιασμού και υλοποίησης του προγράμματος έχει αποσπάσει πολύ θετικές κριτικές για το πρόγραμμα, εξελίσσοντάς το συνεχώς, και δίνοντάς του όλο και περισσότερο διαδραστική μορφή, ώστε οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά, να πειραματίζονται, να ψυχαγωγούνται και να ανακαλύπτουν έννοιες των μαθηματικών και συσχετισμούς τους με την τέχνη και την καθημερινή ζωή. Είναι σε γνώση μας ο μεγάλος όγκος πληροφορίας και γνώσης στην οποία καλούμε να εισέλθουν οι μαθητές, γι' αυτό και προσαρμόζουμε ανάλογα με την ανταπόκριση των μαθητών το εύρος και το βάθος των προναφερθεισών δραστηριοτήτων.

Ενδεικτικά, στις παρατηρήσεις τους οι μαθητές, αναφέρονται σε μια «*ενδιαφέρουσα εμπειρία και βαθύτερη κατανόηση του κόσμου γύρω μας*», «*βαθύτερη γνώση και ερέθισμα για περισσότερη σκέψη*», «*με βοήθησε να οξύνω την κρίση μου*», «*πνευματική τροφή για προβληματισμό της απλότητας και της πολυπλοκότητας του όλου και του μερικού*», «*όποιος καταφέρει να σκεφτεί σύνθετα ίσως καταλάβει τη μαγεία του*», «*μάθαμε να κοιτάμε τον κόσμο με δύο όψεις*», καθώς και σε ένα «*περιθώριο εξερεύνησης που υπάρχει πάντα και παντού!*». Τα ελάχιστα αρνητικά σχόλια συνοψίζονται στη διάρκεια και πυκνότητα της δραστηριότητας: *«θα θέλαμε περισσότερο χρόνο», «ήταν ωραία αλλά πάρα πολλά για μένα».*

Τέλος, αναφέρουμε ελάχιστα από την πληθώρα των θετικών σχολίων που κατέγραψαν εκπαιδευτικοί: «*έδωσε ουσία και πράξη στην αφηρημένη διάσταση των μαθηματικών*», «*αντλήσαμε σημαντικές πηγές κυρίως από το διαδίκτυο, γεγονός που θα αποτελέσει υλικό για περισσότερη έρευνα*», «*έδωσε μια εφαρμογή στη ζωή τους που δεν προσφέρεται από τα σχολικά βιβλία*», «*βρέθηκαν σε διαδραστικό περιβάλλον και το διασκέδασαν*», «*έδωσε ιδέες για το νέο θεσμό των project*», «*έβαλε τους μαθητές να σκεφτούν με ένα διαφορετικό τρόπο και να διασκεδάσουν ταυτόχρονα*», «*θαυμάσαμε τις δυνατότητες των νέων τεχνολογιών από μια νέα συνάδελφο και επιθυμούμε να την μιμηθούμε*».

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barnsley, Michael F. (1993). *Fractals Everywhere*. Morgan Kaufmann, Academic Press, 1993.

Cormen T., Leiserson C., Rivest R. (1990). *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, McGraw-Hill Book Company. United States.

Falconer, K. (1990). *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd.

Jonassen, D.H. (1996). *Computers in the classroom: Mindtools for critical thinking.* Colombus OH: Merrill/Prentice-Hall.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: legitimate peripheral participation.* Cambridge, UK:Cambridge University Press.

Mandelbrot, Benoît B., (1983). *The fractal geometry of nature*. W.H.Freeman and Company.

Peitgen H., Jürgens H., Saupe D., (1992). *Chaos and Fractals, New frontiers of science*. Springer-Verlag New York.

Russ, J., (1994). *Fractal Surfaces*. Plenum Press. New York.

Taylor R.P., Spehar B., Clifford C.W.G., Newell B.R. (2008). *The Visual Complexity of Pollock's Dripped Fractals*, Springer Berlin Heidelberg.

Taylor, R. P. and Guzman, R. and Martin, T. P. and Hall, G. D. R. and Micolich, A. P. and Jonas, D. and Scannell, B. C. and Fairbanks, M. S. and Marlow, C. A., *Authenticating Pollock Paintings Using Fractal Geometry*, Pattern Recognition Letters (2007), vol. 28, no. 6, pp. 695—702.

Κόμης, Β., (2004). *Εισαγωγή σε εκπαιδευτικές εφαρμογές των τεχνολογιών της πληροφορίας και των επικοινωνιών*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Κωτσάνης Γ., Χρονάκη Α., Κόκκωνας Α., Λαγουδάκος Γ., Πριοβόλου Β., Κουρμπέτης Κ. (2000). *«ΙΡΙΣ: Η Τέχνη των Μαθηματικών και τα Μαθηματικά της Τέχνης*», Μελέτη Ένταξης, Εφαρμογής και Αξιολόγησης του προγράμματος ΙΡΙΣ. Αθήνα.