Ο ρόλος του λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας στη δημιουργία αναπαραστάσεων για τη μετάβαση από το «φαίνεσθαι» στο «είναι» των περίπλοκων δομών του κόσμου μας

Αρδαβάνη Καλλιόπη[1], Περυσινάκη Ειρήνη[2]
[1] Μαθηματικός, 3ο Γυμνάσιο Γλυφάδας
popiardv@hotmail.com
[2] Μαθηματικός, Πρότυπο Πειραματικό Γεν. Λύκειο Ηρακλείου
iriniper@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αντίληψη του τρισδιάστατου χώρου επιτυγχάνεται κυρίως από τις προσωπικές εμπειρίες του καθενός, το πώς κινείται σ' αυτόν και το πώς χειρίζεται τα αντικείμενα, γι' αυτό και είναι υποκειμενική. Η προσπάθεια του ανθρώπου να εκφράσει την αντίληψή του για τον χώρο μέσω της Τέχνης εξαίρει τόσο την πολυπλοκότητά του, όσο και την δυσκολία απεικόνισης τρισδιάστατων αντικειμένων στον επίπεδο καμβά. Και τα δυο προκαλούν και επεκτείνουν την Γεωμετρία σε Προβολική, Ελλειπτική, Υπερβολική.

Τα παραπάνω εξηγούν την αδυναμία των μαθητών να σχεδιάσουν, αλλά και να κατανοήσουν τα τρισδιάστατα σχήματα όταν απεικονίζονται στο επίπεδο. Μέχρι σήμερα, η καλύτερη προσέγγιση της Στερεομετρίας μπορούσε να γίνει με την δημιουργία διαφόρων κατασκευών, κυρίως πολυέδρων. Τα στερεά που παράγονται όμως είναι στατικά και δεν προσφέρονται για σημαντικούς πειραματισμούς (το πολύ-πολύ να ενωθούν για να δομήσουν ένα πιο σύνθετο αντικείμενο). Το κενό του πειραματισμού μπορεί να καλύψει το εκπαιδευτικό λογισμικό.

Στην εργασία αυτή, προτείνουμε μερικούς πειραματισμούς για το Γυμνάσιο και το Λύκειο με το υπάρχον λογισμικό. Επίσης εκθέτουμε κάποιες σκέψεις για τα εργαλεία που θα πρέπει να αναπτυχθούν ώστε να διευρύνουν την δυνατότητα πειραματισμού.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *λογισμικό τρισδιάστατων απεικονίσεων, Στερεομετρία, Τέχνη και Μαθηματικά*

Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η Μαθηματική παιδεία που παρέχεται στη Μέση Εκπαίδευση είναι προσανατολισμένη στην κατάκτηση μιας μεθοδολογίας για την αντιμετώπιση ασκήσεων στην Άλγεβρα ή την Ανάλυση, ενώ η Γεωμετρία τίθεται σε «δεύτερη μοίρα» τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Το φαινόμενο είναι εντονότερο για τη Στερεομετρία, η οποία σχεδόν απουσιάζει από το Λύκειο. Οπότε, στην καλύτερη των περιπτώσεων, οι απόφοιτοι Λυκείου κατέχουν μονάχα τα λιγοστά που συζητήθηκαν εμπειρικά στην Β΄ Γυμνασίου. Το γεγονός έχει φοβερές συνέπειες στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, όπως επισημαίνεται από το Μετσόβιο Πολυτεχνείο σε επιστολή του προς όλα τα Λύκεια της χώρας (2011).

Από την άλλη, η λιτότητα μέσων και περιεχομένου της Μέσης Εκπαίδευσης, αντισταθμίζεται με την αλματώδη ανάπτυξη της Τεχνολογίας και των γραφικών των υπολογιστών. Οι μαθητές κατακλύζονται κυριολεκτικά από 3D απεικονίσεις σε παιχνίδια υπολογιστών, σε film animation και άλλες εφαρμογές. Παρόλα αυτά, δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται κάτι περισσότερο από έναν εικονικό κόσμο, το κενό που υπάρχει και εντοπίζεται από το Μετσόβιο στην αντίληψη του χώρου δεν καλύπτεται από αυτά. Γιατί να συμβαίνει κάτι τέτοιο; Όπως επισημαίνει ο Tversky (2005) ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τον χώρο γύρω μας είναι υποκειμενικός. Εξαρτάται από το πώς το σώμα μας χειρίζεται τα αντικείμενα (π.χ. το ξεφύλλισμα ενός βιβλίου) και ποιες εικόνες πλάθουμε καθώς κινούμαστε στον χώρο, ενώ για τα πολύ απομακρυσμένα αντικείμενα όπως τα βουνά, οι εικόνες είναι μάλλον «επίπεδες» και εύκολα «ξεγελιέται» ο εγκέφαλός μας. Χαρακτηριστική είναι η οφθαλμαπάτη με το μέγεθος του δίσκου της Σελήνης που κατά την ανατολή της φαίνεται μεγαλύτερος από ότι κατά την μεσουράνηση της.

Συνεπώς, το εκπαιδευτικό λογισμικό που θα αποδώσει τα τρισδιάστατα αντικείμενα θα πρέπει να είναι αρκετά πειστικό στην απεικόνισή τους. Οι Hedberg και Alexander (1994), προσδιορίζουν τρία χαρακτηριστικά του λογισμικού που συμβάλουν σε αυτό: η «αυξημένη βύθιση», που είναι η αίσθηση του βάθους των αντικειμένων, η «αυξημένη πιστότητα», όταν τα αντικείμενα που προβάλλονται προσομοιάζουν σε μεγάλο βαθμό με τα αντικείμενα του πραγματικού χώρου (για παράδειγμα, ο εικονικός κύβος και ο πραγματικός κύβος) και το «υψηλό επίπεδο συμμετοχής του χρήστη», όταν επιτρέπουν στον χρήστη να τα περιστρέφει ή να τα μετατοπίζει. Στην περίπτωση των κινήσεων, η «πιστότητα» απαιτεί το αντικείμενο να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα κατά την φορά του ρολογιού, όταν ο χρήστης κινεί το ποντίκι επάνω στο αντικείμενο με φορά από δεξιά προς τα αριστερά και φυσικά, κάθε στιγμιότυπο του περιστρεφόμενου στερεού θα πρέπει να είναι πιστό αντίγραφο του αντίστοιχου πραγματικού περιστρεφόμενου.

Γίνεται φανερό πως αυτές οι τρεις αρχές για την επιτυχή αναπαράσταση των τρισδιάστατων αντικειμένων επαρκούν για την κατασκευή ενός 3D παιχνιδιού. Όμως, για την ενασχόληση με τη Στερεομετρία θα πρέπει το λογισμικό να παρέχει πρόσθετα εργαλεία πειραματισμού με τα στερεά. Όχι μόνο να περιστρέφονται να μετακινούνται ή να βυθίζονται στην τρίτη διάσταση, αλλά και να τέμνονται με επίπεδα, να περιστρέφονται γύρω από άξονες στον χώρο, να συνενώνονται δημιουργώντας πιο πολύπλοκες δομές, να υπόκεινται σε κλωνοποιήσεις, ανακλάσεις και άλλους μετασχηματισμούς.

Επιθυμητή, η δημιουργία μικρόκοσμων διερεύνησης του χώρου, με στόχο την πληρέστερη κατανόησή του. Θεωρούμε ότι οι διερευνήσεις θα πρέπει να βασίζονται σε γνήσια ερωτήματα που θα προκαλούν τον μαθητή σε πειραματισμό, οδηγώντας τον πέρα από όσα γνωρίζει και αντιλαμβάνεται. Πολλές φορές το ερέθισμα είναι καλλιτεχνικό, όπως περιγράφουμε ακολούθως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΕ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΙΣΗ

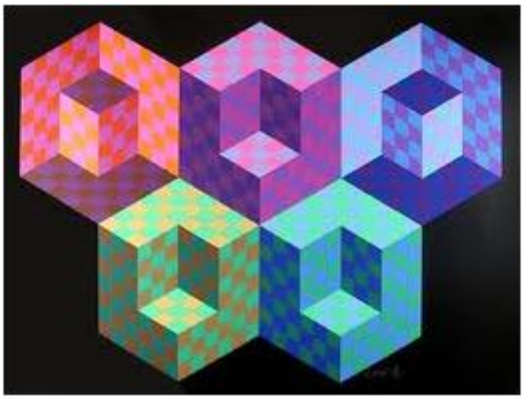
Εικόνα 1: *Ζωγραφική χωρίς βάθος.*

Ο άνθρωπος στη πορεία της εξέλιξης του αποτύπωσε σκηνές από τη ζωή του και τα αντικείμενα που χρησιμοποιούσε πάνω σε βράχια σπηλαίων, σε πάπυρο, σε ξύλο, σε πανί. Αρχικά τα σχέδια του ήταν στιγμιότυπα τα οποία σήμερα θυμίζουν σκηνές από τον μπερντέ του καραγκιοζοπαίχτη. Γεωμετρικά σχέδια, επαναλαμβανόμενα μοτίβα και αργότερα φιγούρες πολεμιστών, όμορφων γυναικών ή σκηνών από τη καθημερινότητα σαν να είναι στιγμιότυπο μιας αξονικής τομογραφίας. Αντικείμενα ίδιου μεγέθους, σχεδιασμένα το ένα δίπλα στο άλλο και σε ίδια απόσταση από τον θεατή. Στα σχέδια αυτά ο ζωγράφος έδινε την αίσθηση του μεγέθους και του όγκου με τις σκιές και τα χρώματα. Απουσίαζε το βάθος, το αντικείμενο δεν καταλάβαινες αν ήταν κοντά ή μακριά σου (εικ. 1).

Εικόνα 2: *Leonardo da Vinci: Μυστικός Δείπνος.*

Στην αναγέννηση, 15ος αιώνας, οι καλλιτέχνες έστρεψαν τη ματιά τους στον πραγματικό κόσμο, εστίασαν στον άνθρωπο και προσπάθησαν να απεικονίσουν στα έργα τους το πραγματικό, αυτό που έβλεπε το μάτι. Παρατήρησαν ότι όσο ο άνθρωπος απομακρύνεται από τα αντικείμενα τόσο αυτά φαίνονται μικρότερα και με λιγότερο καθαρά χρώματα. Επινόησαν έτσι τη μέθοδο της προοπτικής και κατάφεραν να μεταφέρουν την εντύπωση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου πάνω στον καμβά τους, μια επίπεδη επιφάνεια. Ο ουρανός και η γη συναντιόνται στη γραμμή του ορίζοντα. Πολλές ευθείες συγκλίνουν σε ένα σημείο που οι καλλιτέχνες αποκαλούν σημείο φυγής. Συνήθως το σημείο φυγής είναι στο μέσο της ευθείας του ορίζοντα παράδειγμα ο μυστικός Δείπνος του da Vinci (εικόνα 2). Με αυτόν τον τρόπο σχεδιασμού όμως οι καλλιτέχνες βάζουν ένα μεγάλο ερώτημα στη κοινότητα των Μαθηματικών. Πώς γίνεται παράλληλες γραμμές να συγκλίνουν σε σημείο; να τέμνονται; Οι Μαθηματικοί εντυπωσιάζονται, προβληματίζονται και βάζουν τη γραμμική προοπτική σε μαθηματική βάση. Δημιουργούν και άλλες γεωμετρίες εκτός της ευκλείδειας την Παραστατική και Προβολική Γεωμετρία και αργότερα την Ελλειπτική και Υπερβολική Γεωμετρία.

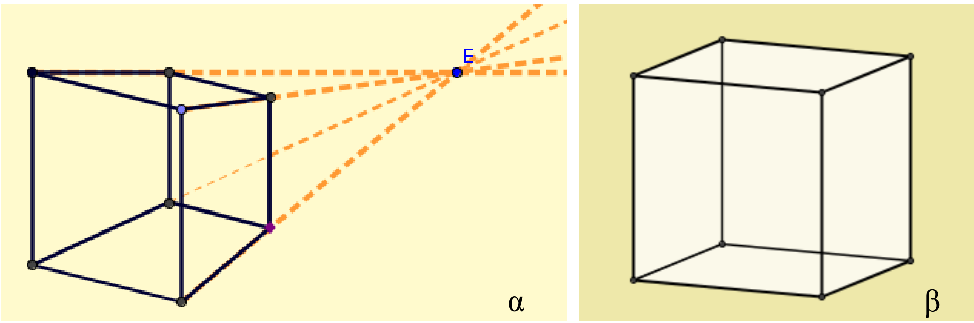
Τον 20ο αιώνα καλλιτέχνες όπως ο Πικάσο (1881-1973) ανέτρεψαν τη μονοσήμαντη θέαση της πραγματικότητας. Διαιρούν τα αντικείμενα σε πολλαπλές απόψεις και απεικονίζουν ταυτόχρονα πολλές και διαφορετικές διαστάσεις ή όψεις τους σε μια νέα νοητή πραγματικότητα. Συχνά οι επιφάνειες των όψεων των αντικειμένων τέμνονται σε γωνίες που δεν έχουν αναγνωρίσιμο βάθος. Ο Πικάσο είπε «ζωγραφίζω τ’ αντικείμενα όπως τα σκέφτομαι και όχι όπως τα βλέπω».



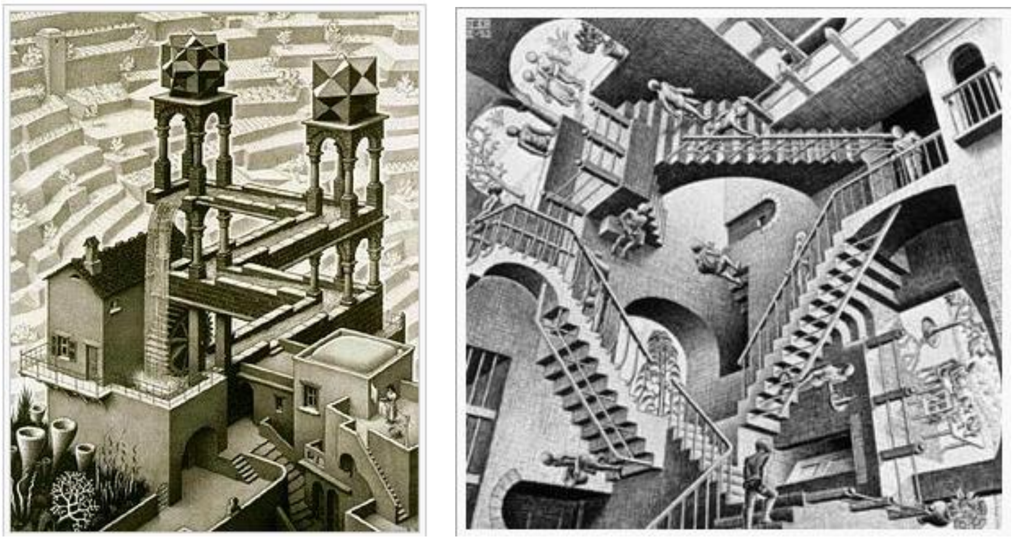
Εικόνα 3: *Οπτικά διλήμματα: Εσωτερική επιφάνεια μεγάλων κύβων με την εξωτερική μικρών ή το αντίστροφο;*

Καλλιτέχνες όπως ο Dali (1904-1989) σχεδιάζουν έργα εκφράζοντας τη δική τους άποψη για τη καμπύλωση του χώρου και τη τέταρτη διάσταση, ορμώμενοι από τη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν. Από τα μέσα του 19ου αιώνα εξελίσσεται η Οπτική, επιστήμη για τη μελέτη του οφθαλμού και οι ψυχολόγοι της σχολής Gestalt, ερευνούν τις αρχές με τις οποίες είναι εφοδιασμένος ο άνθρωπος ώστε να αντιλαμβάνεται εικόνες. Οι καλλιτέχνες παίρνουν και αυτή τη πληροφόρηση και την αξιοποιούν στο έπακρο αναδεικνύοντας την Op art, μια μορφή αφηρημένης γεωμετρικής τέχνης. Καλλιτέχνες όπως ο Vasarely (1906-1997) χρησιμοποιούν το αξονομετρικό σύστημα και σχεδιάζουν έργα με απλά γεωμετρικά σχήματα. Το αξονομετρικό σύστημα συνήθως αποτελείται από τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα με κοινή αρχή, τα οποία σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^o (Karl Pohlke). Τα έργα αυτά προκαλούν τον θεατή μέσω φαινομένων οπτικής απάτης ή οπτικών ψευδαισθήσεων, έχουν αμφισημίες. Προσπαθούν να παραπλανήσουν το “μάτι” ή να βάλουν διλήμματα (εικόνα 3). Προβληματίζουν τον θεατή ποιο είναι μπροστά ή ποιο είναι πίσω; Και αν ο θεατής δώσει μιαν απάντηση πόσο μπορεί να είναι σίγουρος; Αρκούν οι πληροφορίες που δόθηκαν;

Ας δούμε μερικές σημαντικές διαφορές εικόνας αντικειμένου που σχεδιάζεται με προοπτική-κεντρική προβολή, κύβος (εικόνα 4α) και αντικειμένου που σχεδιάζεται με το αξονομετρικό σύστημα -παράλληλη προβολή, κύβος (εικόνα 4β) Το σχέδιο που κατασκευάζεται με προοπτική μοιάζει πολύ με αυτό που αντιλαμβάνεται το μάτι, η φωτογραφική μηχανή. Το μπροστινό του μέρος είναι πιο μεγάλο από το πίσω, αν και αποτελείται από ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα του μέρη συγκλίνουν σε ένα σημείο, το σημείο φυγής. Μας δίνει με αυτόν τον τρόπο την αίσθηση βάθους και μας ενημερώνει ποιο μέρος του είναι μπροστά και ποιο είναι πίσω. Στο σχέδιο που κατασκευάζεται με το αξονομετρικό σύστημα διατηρούνται οι λόγοι τμημάτων, άρα και οι ισότητες τους, καθώς και οι παραλληλίες τους. Δίνεται ή αίσθηση του βάθους στον θεατή, όμως δεν δίνεται η πληροφορία του ποιο μέρος του είναι μπροστά και ποιο είναι πίσω. Μας οδηγεί σε αμφισημίες, με την ίδια λογική θα μπορούσε το μπροστινό μέρος να βρίσκεται πίσω, και το πίσω μπρος. Στο πρώτο σχήμα ο θεατής βρίσκεται πολύ κοντά (οι οπτικές ακτίνες συγκλίνουν) ενώ στο δεύτερο ο θεατής βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από αυτό (οι οπτικές ακτίνες είναι παράλληλες).



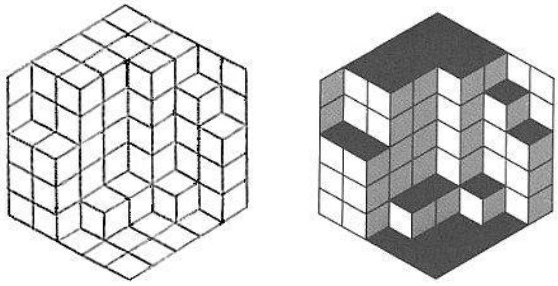
Εικόνα 4: *α) κύβος σχεδιασμένος με προοπτική, β) κύβος σχεδιασμένος με το αξονομετρικό σύστημα.*



Εικόνα 5: *Έργα του Escher: Αριστερά ο «καταρράκτης», δεξιά η «σχετικότητα».*

Ο Escher (1898 -1972) διάσημος χαράκτης σχεδιάζει κανονικά πολύγωνα, τα μετασχηματίζει και καλύπτει με αυτά το επίπεδο. Παίζει με τις αντιθέσεις του μαύρου-άσπρου, νύχτας-ημέρας και χρησιμοποιεί τόνους του γκρι για την μετάβαση από το ένα στο άλλο. Παρατηρούμε απλά σχήματα να εξελίσσονται στο ζωικό κόσμο. Ένα ψάρι να μεταμορφώνεται σταδιακά σε πουλί και αυτό επαναλαμβανόμενο να γεμίζει όλο το επίπεδο. Εντυπωσιάζει τον κόσμο από τις καλούμενες αδύνατες κατασκευές, όπως το «ανέβασμα και κατέβασμα», ο «καταρράκτης» (εικόνα 5), η «σχετικότητα» (εικόνα 5) και τα έργα του στην αυτοομοιότητα. Βάζει τον θεατή σε σκέψεις και αναζητήσεις, πώς είναι δυνατόν να ανεβαίνει κανείς συνέχεια; Πόσα κέντρα βαρύτητας υπάρχουν; Τι άραγε σημαίνει το να βλέπουν ή να χρησιμοποιούν δύο άνθρωποι την ίδια σκάλα για διαφορετικό λόγο; ο μεν ένας για να κατέβει ο δε άλλος για να ανέβει; Πόσες πραγματικότητες υπάρχουν; Ο καθένας ζει στη δική του πραγματικότητα; Ο Escher σχολίασε για τον Καταρράκτη: «Εάν παρακολουθήσουμε τα διάφορα τμήματά αυτής της κατασκευής ένα προς ένα δεν μπορούμε να ανακαλύψουμε κανένα λάθος σε αυτήν. Και όμως πρόκειται για μια αδύνατη ολότητα επειδή αλλαγές συμβαίνουν ξαφνικά κατά την ερμηνεία της απόστασης μεταξύ του ματιού και του αντικειμένου».

Αυτή η διπλή ερμηνεία του «τι πραγματικά υπάρχει» και «τι βλέπουμε» δεν είναι μονάχα ένα «παιχνίδι» της Τέχνης. Συχνά είναι και η καρδιά μιας μαθηματικής απόδειξης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το πρόβλημα με τα calissons (γλυκά γαλλικής προέλευσης με περίπου ρομβοειδές σχήμα) που έθεσαν οι Hallenbeck,, Deturck και Solow, (1989). Σύμφωνα με αυτό, τοποθετούμε με τυχαίο τρόπο τα γλυκά μέσα σε εξαγωνικό κουτί, ώστε να καλυφθεί πλήρως χωρίς κενά (εικόνα 6). Παρατηρούμε ότι διαιρούνται, ανάλογα με τον προσανατολισμό που έχουν, σε τρεις ομάδες (τοποθετημένα βόρεια προς νότια, βόρειο-δυτικά προς νότιο-ανατολικά, βόρεια-ανατολικά προς νότιο-δυτικά). Το εντυπωσιακό είναι πως ανεξάρτητα με το πώς θα γεμίσουμε το κουτί, οι τρεις ομάδες είναι πάντα ισοπληθείς.



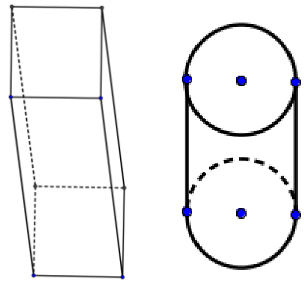
Εικόνα 6: *Το πρόβλημα με τα calisons και η λύση του.*

Η απόδειξη είναι οπτική: Αρκεί να χρωματίσουμε κάθε ομάδα με διαφορετικό χρώμα και το μάτι θα αντιληφθεί κύβους σε στοίβες, ενώ οι ρόμβοι (τα calissons) της κάθε ομάδας θα μετατραπούν στα τετράγωνα που βρίσκονται στο επάνω μέρος του δομήματος, στο αριστερό του μέρος και στο δεξιό του μέρος, συνεπώς είναι ίσα στο πλήθος (ίσως να πρέπει πρώτα να φανταστούμε ότι οι στοίβες με τους κύβους συμπληρώνονται για την δημιουργία ενός μεγαλύτερου κύβου, κάτι που δεν αλλάζει το πλήθος των τετραγώνων επάνω, αριστερά ή δεξιά του δομήματος).

Συμπερασματικά θα λέγαμε πως ο διάλογος Επιστήμης και Τέχνης για το τι είναι αληθινό και τι απατηλό ωφελεί και τους δυο χώρους, δίνοντας ώθηση σε νέες ιδέες. Το λογισμικό τρισδιάστατων απεικονίσεων μετέχει κι αυτό με πρωταγωνιστικό ρόλο στη δημιουργία μορφών που είναι συγχρόνως καλλιτεχνικές και μαθηματικές. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τις διεθνείς εκθέσεις και διαγωνισμούς του λογισμικού Surfer (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach). Θα μπορούσε η Στερεομετρία να υιοθετήσει ως στόχο της την καλλιέργεια του αισθητικού κριτηρίου.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕ ΣΥΜΒΑΤΙΚΑ ΜΕΣΑ: ΚΑΛΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

Στα σχολικά μας μαθήματα χρησιμοποιούμε τα προοπτικά σχήματα για να διδάξουμε την ομοιότητα επίπεδων σχημάτων και την απεικόνιση με το αξονομετρικό σύστημα για τον σχεδιασμό στερεών στο επίπεδο όπως του κύβου, του παραλληλεπιπέδου, των πρισμάτων, των πλατωνικών στερεών. Οι μαθητές μας παίζουν με στερεά αντικείμενα από μικρά παιδιά μέχρι και την νηπιακή τους ηλικία. Στο δημοτικό και στην Α΄ τάξη γυμνασίου ασχολούνται μόνο με γεωμετρικά σχήματα του επιπέδου και στο τέλος της Β΄ τάξης διδάσκονται το μάθημα της Στερεομετρίας. Τους μιλάμε για καινούργια πράγματα όπως για τις ασύμπτωτες ευθείες, επίπεδα, για στερεά σώματα και τους “δείχνουμε” πώς να σχεδιάζουν σωστά έναν κύβο.



Εικόνα 7: *Λανθασμένες απεικονίσεις μαθητών ενός παραλληλεπιπέδου και ενός κυλίνδρου.*

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να φανταστούν τα σχήματα και ακόμη περισσότερο τα στοιχεία από τα οποία αποτελούνται και σίγουρα τις ιδιότητες τους. Όταν ζητήσουμε να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ή την τάξη τους στο χαρτί από τους περισσότερους θα πάρουμε απάντηση το παραπάνω λάθος σχήμα κι αν ζητήσουμε να σχεδιάσουν ένα κύλινδρο ή ένα κουτί αναψυκτικού, πολλοί θα μας δώσουν απάντηση το λάθος σχήμα (εικόνα 7). Δυσκολευόμαστε πολύ με τα συνήθη μέσα που διαθέτουμε να τους βάλουμε να περιεργαστούν και να «δουν» ένα αντικείμενο από διαφορετικές οπτικές γωνίες για να σχεδιάσουν σωστά. Αδυνατούν δε να πάρουν μετρήσεις από αυτά τα αντικείμενα (αποστάσεις ασύμβατων ευθειών, γωνία επιπέδων). Πώς όμως θα γεφυρώσουμε το κενό από την επιπεδομετρία στη στερεομετρία; Πώς θα επιτύχουμε μια ομαλή μετάβαση του μαθήματος μας από το επίπεδο στο χώρο; Μια καλή ιδέα για τη Β΄ Γυμνασίου, θα ήταν να δουλέψουμε με ορθογώνια τρίγωνα πάνω στις έδρες ενός κύβου ή ενός παραλληλεπίπεδου (κατασκευασμένα με χαρτόνια) όταν κάνουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και να μελετήσουμε τη βάση ενός χαρτονένιου κυλίνδρου όταν κάνουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Σε δεύτερη φάση οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με κατασκευές από κυβάκια Lego ή άλλα εκπαιδευτικά παιχνίδια όπως το Zometool.

Περισσότερες δεξιότητες απαιτούνται για τις κατασκευές με χαρτί (origami) ή χαρτόνι. Μια σχετικά απλή δραστηριότητα είναι ο σχηματισμός ενός στερεού από το έτοιμο επίπεδο ανάπτυγμα της επιφάνειάς του, ενώ μια πιο σύνθετη εφαρμόσαμε με μαθητές της Α΄ Λυκείου του ΠΠΓΛ Ηρακλείου (2011): οι μαθητές έπρεπε να συνδέσουν, πλευρά με πλευρά, έτοιμα τετράγωνα και ισόπλευρα τρίγωνα από χαρτόνι που τους δώσαμε για να δημιουργήσουν ένα στερεό που «κάθε τρίγωνο ενώνεται μόνο με τετράγωνα και κάθε τετράγωνο μόνο με τρίγωνα». Τελικά, «ανακάλυψαν» το γριφώδες στερεό, που ήταν το κυβοκτάεδρο, ένα από τα Αρχιμήδεια στερεά.

Δυστυχώς όμως, τα δημιουργήματα αυτά είναι αρκετά στατικά για να γίνουν οι πειραματισμοί που θα επιθυμούσε ένας εκπαιδευτικός, όπως ο σχηματισμό τομών, η δημιουργία στερεών εκ περιστροφής, οι καλύψεις του χώρου και άλλα. Προς αυτή την κατεύθυνση αναπτύχθηκαν τα εκπαιδευτικά λογισμικά, τα οποία εξετάζουμε στην επόμενη παράγραφο.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ

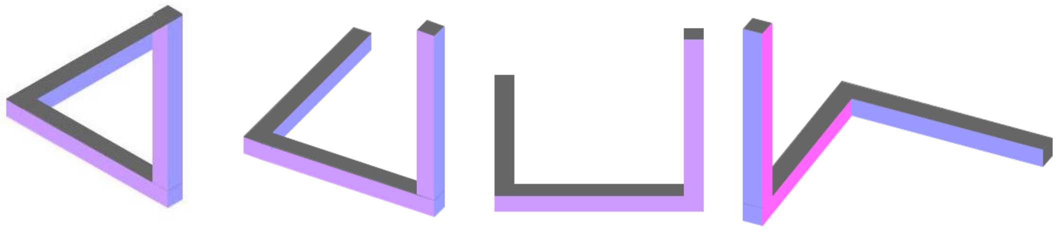
Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εκπαιδευτικού λογισμικού τρισδιάστατων απεικονίσεων που υποστηρίζουν διαφορετικά πεδία των Μαθηματικών. Της Αλγεβρικής Γεωμετρίας (τα πρώτα που αναπτύχθηκαν) όπου κάθε επιφάνεια παράγεται από μια εξίσωση (Mathematica, Maple, Surfer), της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπου δημιουργούνται επίπεδα και στερεά με κατάλληλα εργαλεία (Cabri 3D, Geometria-Geocentral, Calques 3D) και των προγραμματιστικών περιβαλλόντων που συνήθως βασίζονται στη Γεωμετρία της τρισδιάστατης χελώνας Logo (Malt, Cruislet, Elica) και αναδεικνύονται οι κινήσεις που μπορεί να κάνει το σώμα μας στον χώρο. Επίσης, αρκετά από αυτά τα λογισμικά έχουν αναπτύξει ενδιαφέροντα περιβάλλοντα τρισδιάστατων απεικονίσεων, όπως είναι το DALEST της Elica.

Σ' αυτή την παράγραφο θα επικεντρωθούμε στα εργαλεία και τους πειραματισμούς που επιτρέπουν τα λογισμικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προτείνοντας συγκεκριμένες δραστηριότητες.

Δραστηριότητα 1η: Η καθετότητα στον χώρο

Εικόνα 8: *Το γραμματόσημο με το «αδύνατο τρίγωνο» με τις 3 ορθές γωνίες που σχεδίασε ο Oscar Reutersvärd.*

Τον τελευταίο αιώνα παρατηρούμε ένα συνεχή διάλογο των επιστημών για το “φαίνεσθαι” και το “είναι” ως μια συνεχή πρόκληση μιας ομάδας προς μια άλλη. Σ' αυτό το παιχνίδι θα μπορούσαμε να καλέσουμε και τους μαθητές μας δίνοντας τους το παραπάνω σχήμα τριγώνου (εικόνα 8). Αυτό το αξιοπερίεργο τρίγωνο με τις τρεις ορθές γωνίες, το σχεδίασε ο Σουηδός καλλιτέχνης Oscar Reutersvärd το 1934. Μια σειρά κύβων σε προοπτική δημιουργούν τρίγωνο, ώστε αυτό να φαίνεται ότι έχει τρεις ορθές γωνίες. Το 1950 ο μαθηματικός Roger Penrose ανακάλυψε αυτό το αδύνατο τρίγωνο σαν την αδυνατότητα στην πιο καθαρή μορφή. Θα μπορούσαμε λοιπόν να προβληματίσουμε τους μαθητές με την δυνατότητα ύπαρξης ενός τέτοιου τριγώνου αφού όλοι γνωρίζουμε ότι ένα τρίγωνο έχει το πολύ μια ορθή γωνία, ενώ αυτό φαίνεται να έχει και τις τρεις γωνίες του ορθές!



Εικόνα 9: *το τρίγωνο του Penrose, ιδωμένο από διαφορετικές οπτικές, αποκαλύπτει το πραγματικό του σχήμα.*

Εδώ θα ήταν βοηθητικό ένα αρχείο με δυναμικό λογισμικό (αρχείο Geogebra) στο οποίο θα έχουμε κατασκευάσει ένα τέτοιο τρίγωνο (εικόνα 9). Οι μαθητές αρχικά θα εκπλαγούν όταν δουν το τρίγωνο στο χώρο και όταν το περιστρέφουμε να διαφοροποιείται κάθε λίγο μέχρι να διαπιστώσουν ότι κάθε άλλο παρά τρίγωνο ήταν. Με μια δεύτερη πιο προσεκτική ματιά αντιλαμβάνονται το παιχνίδι με τα τρία κάθετα τμήματα. Τρία κάθετα τμήματα τέτοια ώστε το πρώτο με το δεύτερο και το δεύτερο με το τρίτο να τέμνονται κάθετα ενώ το πρώτο με το τρίτο είναι ασύμβατα κάθετα! Στο Περθ της Αυστραλίας είναι κατασκευασμένο ένα τέτοιο αντικείμενο σε μια πλατεία. Οι περαστικοί ή οι οδηγοί αυτοκινήτου κατά τη κίνηση τους γύρω από αυτό, παρατηρούν έκπληκτοι κάποια στιγμή τους βραχίονες του να σχηματίζουν τρίγωνο με τρεις ορθές γωνίες (Vurdlak 2007).

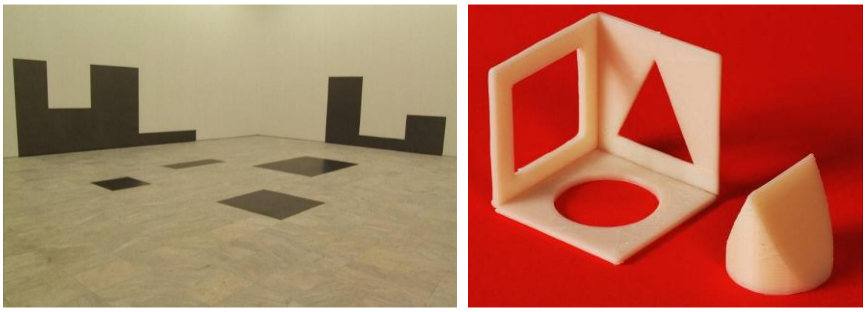
Ένα ερώτημα ακόμη προς τους μαθητές θα ήταν το να ερευνήσουν τη σχέση του τριγώνου Penrose με τα προηγούμενα έργα του Escher «καταρράκτη» και «σχετικότητα».

Δραστηριότητα 2η: Προβολές

Εικόνα 10: *τίτλος του πίνακα «ένας Μεξικάνος» Ο ζωγράφος απλά έβλεπε τον Μεξικάνο από ψηλά.*

Μία κλασσική ερώτηση που κάνουμε στους μαθητές μας είναι να τους δείξουμε μια φωτογραφία ενός πίνακα ζωγράφου (εικόνα 10) και να ζητήσουμε να βρουν τον κρυμμένο τίτλο. Οι περισσότεροι μαθητές λένε οτιδήποτε σχετικό με κύκλους. Τους εμφανίζουμε τον τίτλο του ζωγράφου «ένας Μεξικανός». Οι μαθητές γελούν και ρωτούν που είναι ο Μεξικανός; απαντάμε ότι αυτό είναι το σομπρέρο του και ο Μεξικανός ξεκουράζεται καθισμένος από κάτω, ο ζωγράφος έβλεπε τον Μεξικανό από ψηλά! Δείχνοντας ένα πλαϊνό πλάνο του σομπρέρο περνάμε με τους μαθητές μας στις προβολές ενός στερεού και την αξία της πληροφορίας τους για την αναγνώριση ενός στερεού.

Η εικόνα 11 αριστερά δείχνει μια άποψη από την έκθεση του καλλιτέχνη Ulrich Rückriem «Σκιές της πέτρας» ΕΜΣΤ, 2008. Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τα γεωμετρικά στερεά που έχουν αφήσει τις σκιές τους στα τρία κάθετα ανά δύο επίπεδα, όπως απεικονίζονται στην εικόνα. Παρουσιάζουμε στους μαθητές τις σκιές τους σε ένα μόνο επίπεδο και βαθμιαία τις υπόλοιπες. Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι με τις πληροφορίες της σκιάς του αντικειμένου, προβολής του σε ένα μόνο επίπεδο, έχουν πολλές απαντήσεις. Όσο παρουσιάζονται πληροφορίες για τη προβολή του και σε άλλο επίπεδο τόσο είναι σε καλύτερη θέση να διαπιστώσουν το είδος του στερεού. Αυτά τα μαθήματα θα πραγματοποιηθούνταν καλύτερα με ένα κατασκευασμένο αρχείο λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας 3D, ώστε να μπορούν οι μαθητές να βλέπουν ένα αντικείμενο και τη προβολή του σε επίπεδο.



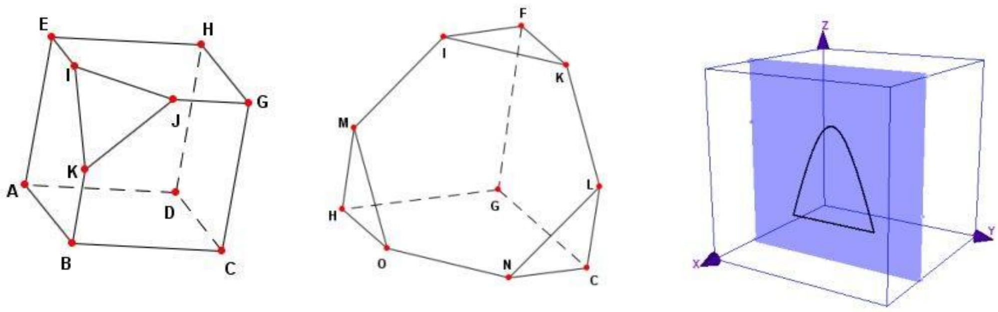
Εικόνα 11: *Προκλήσεις με τις προβολές: Αριστερά το έργο «Σκιές της πέτρας», δεξιά το στερεό που περνά εφαρμοστά από 3 διαφορετικές τρύπες, τετράγωνη, κυκλική, τριγωνική.*

Προκλητικά και τα επόμενα δύο: Είναι δυνατόν ένα στερεό να έχει τετράγωνη προβολή σε τρία, ανά δύο κάθετα επίπεδα, χωρίς να είναι κύβος; Μπορούμε να φανταστούμε ένα στερεό που η προβολή του σε ένα επίπεδο να είναι τετράγωνο, σε άλλο επίπεδο, κάθετο στο πρώτο, να είναι ισόπλευρο τρίγωνο και σε τρίτο, κάθετο στα δύο προηγούμενα επίπεδα να είναι κύκλος (εικόνα 11, δεξιά); Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ γνωστό και προκάλεσε την περιέργεια των μαθητών μας, οι οποίοι αδυνατούσαν να φανταστούν αυτό το στερεό. Κατανόησαν όμως το σχήμα του όταν το περιεργάστηκαν στην τρισδιάστατη αποθήκη Trimble της Google (Square Circle Triangle Block). Δυστυχώς όμως, δεν εντοπίσαμε κάποιο λογισμικό που να υποστηρίξει τον μαθητή να πειραματιστεί και να το κατασκευάσει (π.χ. σαν τομή κυλίνδρου και τριγωνικού πρίσματος).

Εντούτοις, το πρόβλημα του στερεού με τις τετράγωνες προβολές, απαντήθηκε μέσα από την δημιουργία τομών στο Geometria-Geocentral, όπως περιγράφουμε παρακάτω.

Δραστηριότητα 3η: Τομές στερεών

Ζητήθηκε από τους μαθητές να πάρουν έναν κύβο στον χώρο του Geometria-Geocentral και να σκεφτούν τι κομμάτι θα μπορούσαν να αποκόψουν από αυτόν, ώστε οι προβολές του νέου στερεού στα επίπεδα x-y, x-z, y-z να εξακολουθούν να είναι τετράγωνο. Σύντομα οι μαθητές έδωσαν ενδιαφέρουσες απαντήσεις, μία εικονίζεται στην εικόνα 12 αριστερά. Όμως γενικότερα οι τομές του κύβου με επίπεδα προκάλεσαν το ενδιαφέρον, καθώς διαπίστωσαν ότι θα μπορούσε αυτή να είναι κανονικό εξάγωνο (εικόνα 12, στο κέντρο). Μάλιστα, τα δύο κομμάτια που προέκυψαν ήταν ολόιδια.



Εικόνα 12: *Τομές στερεών: δραστηριότητες με τα λογισμικά Geometria-Geocentral και DALEST-Elica.*

Στον μικρόκοσμο “Slider” του λογισμικού “DALEST-Elica” υπάρχει η εξής ιδέα με τις τομές: ο χρήστης επιλέγει έναν από τους άξονες x'x, y'y, z'z και με τη βοήθεια δρομέα σαρώνει τον χώρο με επίπεδα κάθετα προς αυτόν τον άξονα. Αυτά τέμνουν ένα αόρατο στερεό το οποίο προσπαθεί να αναγνωρίσει από τις τομές του με τα επίπεδα (εικόνα 12, δεξιά). Πρόκειται δηλαδή για μία νοητή ανασύνθεση του στερεού από τις τομές του.

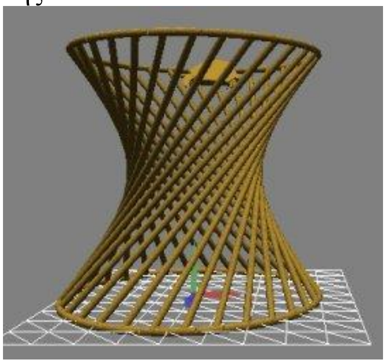
Δραστηριότητα 5η: Δομικές μονάδες και κάλυψη του χώρου

Αν η κάλυψη του επιπέδου με ένα μοναδικό «πλακάκι» που επαναλαμβάνεται προκαλεί, η κάλυψη του χώρου με τις παραθέσεις του ίδιου στερεού πραγματικά ξεπερνά κάθε φαντασία. Φυσικά, απλές δομικές μονάδες που καλύπτουν τον χώρο υπάρχουν, όπως είναι οι κύβοι και τα εξαγωνικά πρίσματα. Κάτι όμως πιο ευφάνταστο, αντίστοιχο με τα ψηφιδωτά του Escher με τις φιγούρες ζώων υπάρχει; Η απάντηση θα δοθεί, κατανοώντας πρώτα την γεωμετρία των ψηφιδωτών του Escher.. Συχνά, ο κανόνας είναι απλός: ξεκινάμε από μια πλακόστρωση με τετράγωνα και μετά δημιουργούμε ακριβώς τις ίδιες εσοχές και προεξοχές στις παράλληλες πλευρές των τετραγώνων. Αν η ιδέα αυτή μεταφερθεί στον χώρο, τότε μπορούμε ξεκινώντας με τον κύβο να καταλήξουμε σε ένα αστεροειδές στερεό που λέγεται «στερεό του Escher» (ή αστεροποίηση του ρομβικού δωδεκάεδρου) καθώς αυτό εμφανίζεται στον «καταρράκτη» του, επάνω δεξιά (εικόνα 5, αριστερά). Στην κάλυψη του χώρου με αυτό, βασίζεται ένα «μαγικό» παιχνίδι που καλείται «Yoshimoto Cube» όπου υπάρχει ένας κύβος με κινούμενα μέρη που καθώς αυτά κινούνται, ο κύβος αλλάζει χρώμα, έπειτα διαιρείται σε δύο ισομεγέθεις κύβους και τέλος οι δύο κύβοι μετασχηματίζονται σε «στερεά του Escher».

Δραστηριότητα 6η: Περιστροφές.

Οι μικρόκοσμοι «Math Wheel» και «Potter’s Wheel» του λογισμικού DALEST-Elica, παρέχουν σαφή εικόνα για τον τρόπο σχηματισμού στερεών εκ περιστροφής: μια επίπεδη καμπύλη, όταν περιστραφεί γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό της, θα δημιουργήσει μια επιφάνεια. Παρέχεται στον χρήστη η δυνατότητα να δημιουργήσει τα δικά του στερεά εκ περιστροφής όπως έναν κώνο, ή έναν λουκουμά (torus), όμως είναι αρκετά περιορισμένη.

Δεν μπορεί για παράδειγμα να περιστρέψει ευθεία γύρω από άξονα που δεν βρίσκεται στο επίπεδό της, ώστε να δει το μονόχωνο υπερβολοειδές να παράγεται από ευθείες, ένα πραγματικά απρόσμενο αποτέλεσμα. Ακόμα και τα λογισμικά Αλγεβρικής Γεωμετρίας δεν δίνουν την πληροφορία του σχηματισμού του από ευθείες έτσι όπως απεικονίζουν την συγκεκριμένη επιφάνεια. Φαίνεται πως το ιδανικό λογισμικό γι’ αυτήν την περίπτωση είναι το Malt (εικόνα 13) όπου το υπερβολοειδές μπορεί να αλλάζει δυναμικά, καθώς μεταβάλλεται η κλίση της γενέτειρας-ευθείας και κατά συνέπεια η γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής.



Εικόνα 13: *Η χελώνα του Malt δημιούργησε το υπερβολοειδές από την στροφή μιας ευθείας.*

Δραστηριότητα 7η: Αναπτύγματα στερεών.

Όπως αναφέραμε, μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα στερεομετρίας είναι η κατασκευή στερεών με χαρτόνι, χρησιμοποιώντας το επίπεδο ανάπτυγμα της επιφάνειάς τους. Για παράδειγμα, μπορούμε να σχεδιάσουμε σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο το τρίγωνο που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του, διαιρώντας το έτσι σε τέσσερα μικρότερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Έπειτα, διπλώνοντας τις κοινές πλευρές τους, θα δημιουργήσουμε ένα τετράεδρο. Με αυτή την διαδικασία όμως αγνοούμε ποια γωνία σχηματίζουν δύο διαδοχικές έδρες του. Επίσης, ίσως να θέλαμε να πειραματιστούμε και με άλλη αρχική διάταξη των 4 ισόπλευρων εδρών του τετραέδρου στο επίπεδο, ελέγχοντας εάν κι αυτή οδηγεί επιτυχώς στην κατασκευή του τετραέδρου.

Με τον μικρόκοσμο «Origami Nets» του DALEST-elica, οι πειραματισμοί αυτοί είναι εφικτοί και αρκετά ενδιαφέροντες καθώς ο χρήστης έχει την δυνατότητα να «διπλώνει» και να «ξεδιπλώνει» την επιφάνεια, ελέγχοντας αν επέλεξε σωστές γωνίες δίπλωσης, αλλά και σωστή διάταξη των εδρών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα εκπαιδευτικά λογισμικά Στερεομετρίας διευκολύνουν την «οπτική ανάγνωση» ενός στερεού για τον τρόπο δόμησής του και παρέχουν αρκετές δυνατότητες πειραματισμού. Φαίνεται όμως πως δεν υπάρχει κάποιο λογισμικό που να καλύπτει όλο το εύρος των πειραματισμών, αλλά ότι το ένα συμπληρώνει το άλλο. Επιθυμητή θα ήταν η ανάπτυξη ενός λογισμικού που να λαμβάνει υπόψη του τόσο τα στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όσο και της Αλγεβρικής. Επίσης, ίσως θα ήταν ενδιαφέρουσα η δυνατότητα σχεδιασμού του ίχνους των αντικειμένων (σημείων, καμπυλών, επιφανειών) καθώς αυτά μετατοπίζονται. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, ένας κύκλος που κινείται κάθετα, κατά μήκος ενός άξονα, θα δημιουργήσει έναν κύλινδρο, αιτιολογώντας έτσι την σχέση ανάμεσα στον όγκο κυλίνδρου και το εμβαδόν της βάσης του. Ενδιαφέρουσα θα ήταν και η δυνατότητα σχεδιασμού τομών επιφανειών μεταξύ τους και όχι μόνο με επίπεδα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arthur, E.J., Hancock, P.A and Chrysler, S.T. (1997) The perception of spatial layout in real and virtual worlds. Ergonomics 40,69-77.

Bulthoff, H.H., Edelman, S.Y. and Tarr, M.J. (1995) How are three-dimensional objects represented in the brain? Cerebral Cortex 3,247-260.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., Pitta, D., Jones, K., Sendova, E., & Boytchev, P. (2007). Developing an active learning environment for the learning of stereometry. Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching. University of Hradec Králové: Czech Republic.

Dalgarno, B., J. Hedberg and B. Harper (2002). The contribution of 3D environments to conceptual understanding. In Proceedings of ASCILITE 2002 Conference. Auckland, New Zealand, pp. 44–54.

Hallenbeck D., Deturck D. Solow A., (1989). The problem of the Calissons, The American Mathematical Monthly, Vol. 96, No.5, May, 1989

Hedberg, J. and Alexander, S. (1994). Virtual reality in education: Defining researchable issues. Educational Media International, 31, 214-220.

Lowrie, T. (2002). The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3D worlds. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 301–318.

Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 25–53.

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. IMAGINARY - trhough the eyes of mathematics http://www.imaginary-exhibition.com/wannwo.php

Moore, P. (1995) Learning and teaching in virtual worlds: Implications of virtual reality for education. Australian Journal of Educational Technology 11,91-102.

M.Pittalis, N. Mousoulides, & A.Antreou, (2009) Construction of dynamic visual images of 3D Geomatry shapes, Procceedings of the ICTM 9

Tversky, B. (2005). Functional significance of visuospatial representations. In P. Shah and A. Miyake (Eds.),

Ulrich Rückriem (2008). Shadows of the Stones, http://www.slideshare.net/thales1/ss-15792739 (διαφάνεια 21)

Vurdlak (2007): Perth Impossible Triangle Optical Illusion http://www.moillusions.com/2007/04/perth-impossible-triangle-optical.html

Wallis, G. and Bulthoff, HH. (1999) Learning to recognise objects. Trends in Cognitive Sciences 3,2231.

Wickens, C., M. Vincow and M. Yeh (2005). Design applications of visuospatial thinking: the importance of frame of reference. In P. Shah and A. Miyake (Eds.), The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 383–425.

Αρδαβάνη Π. Penrose - Escher Triangle, Geogebra Tube http://geogebratube.org/student/m25516

Λευκαδίτης Γ. και Κουκοφίκης Θ. Το θεμελιώδες θεώρημα της αξονομετρίας Karl Pohlke, http://civil.teipir.gr/web/uploads/LEYKADITHS_KOUKOFIKHS.pdf

Προτάσεις Βελτίωσης της Διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, (2011). Τομέας Μαθηματικών, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε. Μ. Πολυτεχνίου http://www.emelak.gr/Nea/Protasi_beltiosis_mathimatikon_DE.pdf

ΠΠΓΛΗ- Εργαστήριο Μαθηματικών (2011): Το Α1 στην Εστία Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης (Στερεο-ανακαλύψεις) http://mathlab.mysch.gr/mathimata/2011_visit_A1.html