Από τη Σταθερή Πολυγωνική Γραμμή στην Προσέγγιση Καμπύλης του Χώρου με Βάση την Αναδρομή Ουράς

Ζάντζος Ιωάννης[1], Κυνηγός Χρόνης[2]

[1] Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
izantzos@math.uoa.gr
[2] Καθηγητής ΕΚΠΑ
Kynigos@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης που αναφέρεται σε 15 μαθητές Γ΄ γυμνασίου και στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν τυχαίες καμπύλες του χώρου με βάση την έννοια της καμπυλότητας. Οι μαθητές εργάστηκαν χρησιμοποιώντας ένα 3D υπολογιστικό περιβάλλον (MaLT) που συνδυάζει το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων και τη συμβολική έκφραση μέσα από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων πρόκυψε ότι το κυρίαρχο μοντέλο για την κατασκευή μιας καμπύλης από τους μαθητές, ήταν το μοντέλο των τριών φάσεων: [κατασκευή σταθερής διαδικασίας (σταθερή πολυγωνική γραμμή) –προσέγγιση της καμπύλης με βάση την έννοια της καμπυλότητας και την εντολή repeat (εσφαλμένα) – Εκσφαλμάτωση (debugging). Από την επαναληπτική στη αναδρομική μέθοδο]. Στα σημαντικά ευρήματα καταγράφεται επίσης και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές τροποποίησαν έναν κώδικα στηριζόμενο στην εντολή repeat (επανάλαβε) σε κώδικα με βάση την αναδρομή ουράς.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Αναδρομή ουράς, Καμπύλη*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της καμπύλης και η μελέτη των ιδιοτήτων της και των τρόπων προσέγγισής της, αποτελεί σημαντικό θέμα στην δευτεροβάθμια αλλά και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και αντικείμενο μελέτης σε πολλούς τομείς όπως για παράδειγμα στη διαφορική γεωμετρία. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όμως, τουλάχιστον στην Ελλάδα, η γεωμετρία περιλαμβάνει μόνο απλές καμπύλες: ευθεία, κύκλο και κωνικές τομές, ενώ στην ανάλυση αναφέρονται καμπύλες συναρτήσεων που είναι αφηρημένες αναπαραστάσεις μαθηματικών σχέσεων παρά γεωμετρικά σχήματα (Kynigos and Psycharis, 2003) και μάλιστα χωρίς να γίνεται μια διαισθητική εισαγωγή της έννοιας της καμπύλης ως ‘η διαδρομή ενός κινητού σημείου’. Αλλά σε κάθε είδος πρακτικής δραστηριότητας, αντιμετωπίζουμε καμπύλες διαφόρων μορφών και μάλιστα τρισδιάστατες, όπως για παράδειγμα η σύντομη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια επιφάνεια. Η μελέτη τέτοιων καμπυλών όμως μπορεί να επιτευχθεί με έννοιες διαφορικής γεωμετρίας και όχι με τα στατικά παραδοσιακά μέσα και τον τρόπο εισαγωγής τους που προτείνεται στα σχολικά βιβλία.

Η εμφάνιση περιβαλλόντων δυναμικού χειρισμού και ιδιαίτερα των εμφανισθέντων τα τελευταία χρόνια 3D περιβαλλόντων, δείχνει να αλλάζει το τοπίο για έννοιες σχετικές με την καμπύλη. Οι δυνατότητες για διερεύνηση και η χρήση του δυναμικού χειρισμού που παρέχουν σήμερα οι ψηφιακές τεχνολογίες, μπορούν: α) να δώσουν τη δυνατότητα απόκτησης εμπειριών εκ μέρους των μαθητών με τέτοιες αφηρημένες έννοιες γενικά στο χώρο, τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο, πριν φτάσουν στους πολύπλοκους τύπους της διαφορικής γεωμετρίας, β) να μεσολαβήσουν στη μετάβαση από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο (Jones, 2000), γ) να αποτελέσουν τη βάση για μια αναδόμηση της περιοχής (restructuration, Wilensky, 2010) όπως στη περίπτωση που μελετάμε για την έννοια της καμπύλης και της προσέγγισής της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Yerushalmy and Schwartz (1999), μαθητές με τη χρήση κατάλληλων ψηφιακών εργαλείων ασχολήθηκαν με ένα πλήθος εννοιών αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα μελέτης της καμπυλότητας μιας επίπεδης συνάρτησης και το επίπεδο αφαίρεσης που οι μαθητές είχαν φτάσει ήταν πολύ υψηλό και το επίπεδο κατανόησης βαθύτερο. Ιδιαίτερα, με τη χρήση της γεωμετρίας της χελώνας και τα γραφικά της, έχουμε τη δυνατότητα για μια εναλλακτική και ευρύτερη προσέγγιση των καμπυλών. Η προσέγγιση με τη χελώνα μας δίνει τη δυνατότητα να γυρίσουμε στον πραγματικό γεωμετρικό ορισμό των καμπύλων και να αναπτύξουμε αναπαραστάσεις που είναι συχνά πιο καθαρές και πιο κοντά στον αυθεντικό ορισμό (Loethe, 1992). Έρευνες επίσης έχουν δείξει ότι ακόμα και μικροί μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν νοήματα για έννοιες όπως η καμπυλότητα στο επίπεδο ασχολούμενοι με κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα που συνδυάζουν τη γλώσσα προγραμματισμού (Logo) με το δυναμικό χειρισμό (e.g Kynigos & Psycharis, 2003).

Για μια αναδόμηση (restructuration, υπό την έννοια του Wilensky, 2010) του τρόπου προσέγγισης της έννοιας της καμπύλη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιήσαμε ένα 3D λογισμικό (MaLT) και σχεδιάσαμε ένα μικρόκοσμο για μια διαφορική προσέγγιση της έννοιας της καμπύλης. Η μέθοδος ‘Local Turning and Twisting’ (LTT, Τοπική Στροφή και Περιστροφή, Για λεπτομέρειες: Zantzos and Kynigos, 2012) που αναπτύξαμε, αντανακλά τον τρόπο που μια καμπύλη σχεδιάζεται στο χώρο με όρους διαφορικής γεωμετρίας και δίνει τη δυνατότητα ακόμη και σε μικρούς μαθητές να διερευνήσουν και να εκφράσουν συμβολικά αυτόν τον τρόπο μέσω της γλώσσας Logo τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο.

Η έννοια της αναδρομής είναι μια έννοια δύσκολη να διδαχτεί και να κατανοηθεί και έχει αποτελέσει αντικείμενο πολυάριθμων ερευνών (π.χ, Levy & Lapidot, 2000; Mirolo, 2010; Sooriamurthi, 2002; Scholtz, & Sanders, 2010) και οι οποίες έχουν αναδείξει αρκετές από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές. Υπάρχει μεγάλη δυσκολία να βρεθούν παραδείγματα καθημερινής ζωής για την έννοια της αναδρομής, όπως και το ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη ροή εκτέλεσης ενός προγράμματος με αναδρομή. Δυσκολίες επίσης υπάρχουν και με τη διάκριση μεταξύ των εννοιών της επανάληψης και της αναδρομής (iteration vs recursion). Μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις παραπάνω έννοιες, συχνά χρησιμοποιούν ένα επαναληπτικό μοντέλο για να αναπαραστήσουν την αναδρομή που είναι συμβατό με την αναδρομή ουράς αλλά αποτυγχάνει σε πιο γενικές περιπτώσεις. Λόγω αυτής της δυσκολίας, πολλοί ερευνητές πιστεύουν ότι η εισαγωγή της αναδρομής μετά την έννοια της επανάληψης (iteration) μπορεί να επηρεάσει τη μάθηση της αναδρομής (Anazi & Uesato,1983). Ενώ άλλοι ερευνητές, όπως η Rogalski (1990),συστήνουν τη διδασκαλία της αναδρομής πριν από τις επαναληπτικές δομές. Η διάκριση μεταξύ αυτών των δυο εννοιών φαίνεται να αποτελεί μια από τις πιο κοινές δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές για την κατανόηση της έννοιας της αναδρομής (Turbak et al, 1999; Harvey, 1997).

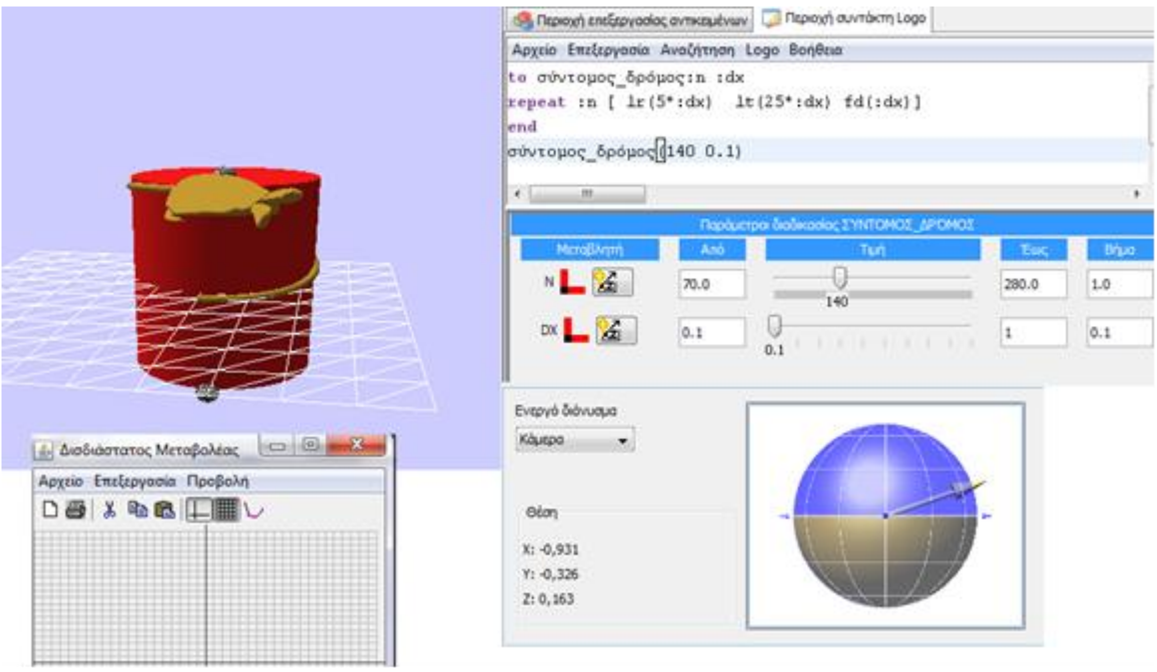
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο Vergnaud (1988, 2009), εισήγαγε την έννοια του εννοιολογικού πεδίου (conceptual field) ως ένα σύνολο καταστάσεων, η γνώση των οποίων απαιτεί γνώση πολλών εννοιών διαφορετικής φύσης. Υποστήριξε ότι έχει νόημα η θεώρηση μιας έννοιας σε σχέση με άλλες συγγενείς έννοιες, με καταστάσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις της και δεν έχει νόημα η αντίληψή της σε απομόνωση. Με βάση το σχεδιασμό μας, δώσαμε στους μαθητές ένα πρόβλημα που αφορούσε την εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Η έννοια της ‘συντομότερης διαδρομής’ συνδέεται άμεσα με έννοιες όπως, η καμπυλότητα και η στρέψη στο χώρο, ο ρυθμός μεταβολής, το μήκος τόξου και η προσέγγιση καμπύλης μέσω των εφαπτόμενων της, έννοιες δηλαδή του εννοιολογικού πεδίου της καμπυλότητας στο χώρο. Έτσι, με βάση το πλαίσιο του Vergnaud, θεωρήσαμε χρήσιμο να μελετήσουμε την έννοια της σύντομης διαδρομής σε σχέση με τις προαναφερόμενες έννοιες, τις άμεσα συσχετιζόμενες με αυτή.

Έχοντας ως βασικό στόχο τη διερεύνηση των νοημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές σχετικά με έννοιες του παραπάνω εννοιολογικού πεδίου, σχεδιάσαμε δραστηριότητες στηριζόμενοι στη θεωρία μάθησης μέσω κατασκευών (constructionism, Kafai and Resnick, 1996). Ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που θεωρήσαμε κατάλληλο για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ήταν να τους δώσουμε να ξεκινήσουν με έναν «μισοψημένο» μικρόκοσμο (Kynigos, 2007) με την ονομασία ‘σύντομος δρόμος’. Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι λογισμικά σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς ή ακόμα να τους αλλάξουν αλλά και να τους αποδομήσουν. Δεν αποτελούν έτοιμα περιβάλλοντα για να κατανοηθούν από τους εκπαιδευτικούς και μετά να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Ενσωματώνουν διάφορες έννοιες και προσφέρουν στο μαθητή τα εργαλεία για να αλληλεπιδράσει με το μικρόκοσμο. Στόχος τους είναι να λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης, και ο χρήστης να οικειοποιηθεί τις ιδέες που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής τους.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα έρευνα είναι το MaLT (http:/etl.ppp.uoa.gr) το οποίο συνδυάζει τη συμβολική έκφραση μέσα από μια γλώσσα προγραμματισμού (Logo) και το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων. Είναι επέκταση της Γεωμετρίας της Χελώνας του ‘Χελωνόκοσμου’ στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο, κατάλληλο για κατασκευή και εξερεύνηση γεωμετρικών αντικειμένων. Οι κινήσεις της χελώνας καθορίζονται από τις εξής εντολές: fd(:n) και bk(:n) οι οποίες δίνουν εντολή στη χελώνα να κινηθεί n βήματα μπροστά ή πίσω, lt(:n) και rt(:n) κινούν τη χελώνα n μοίρες αριστερά ή δεξιά στο επίπεδό της (εγγύτατο επίπεδο), dp(:n) και up(:n) στρέφουν τη χελώνα προς τα κάτω ή προς τα πάνω και rr(:n) , lr(:n) περιστρέφουν τη χελώνα γύρω από την ευθεία της κίνησή της. Τα βασικά εργαλεία του MaLT είναι (Εικόνα 1): Ο απλός μεταβολέας ο οποίος παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των τιμών των μεταβλητών σε ένα αναπαριστώμενο σχήμα και ο δισδιάστατος μεταβολέας ο οποίος είναι ένα δυσδιάστατο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η συμμεταβολή δύο μεταβλητών. Δυο ακόμη χαρακτηριστικά είναι η δυνατότητα που έχει ο χρήστης να χειρίζεται δυναμικά την κάμερα μέσω του ενεργού διανύσματος και να παρατηρεί το αντικείμενο στη σκηνή από όποια πλευρά και κατεύθυνση επιθυμεί, και τη δυνατότητα για εισαγωγή έτοιμων 3d αντικειμένων στη σκηνή, όπως σφαίρας και κυλίνδρου.



Εικόνα 1: *Το Περιβάλλον του MaLT*

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρόβλημα:

«Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια».

Για τους πειραματισμούς, αναφέραμε στους μαθητές ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν όποια υλικά θέλουν (π.χ χαρτί, ψαλίδι), και τον παρακάτω μισοψημένο μικρόκοσμο με την ονομασία 'σύντομος δρόμος':

```
to σύντομος δρόμος :n :s :dx :c
repeat :n [lr(:s) lt(:c) fd(:dx)]
end
```

Ο παραπάνω μικρόκοσμος περιλαμβάνει ένα πρόγραμμα με τέσσερις παραμέτρους με την κάθε μια να εκφράζει το εξής: n-πλήθος επαναλήψεων, s-στροφή της χελώνας γύρω από την κατεύθυνση της κίνησής της (καθορίζει τη στρέψη) , dx-καθορίζει το μήκος του βήματος της χελώνας και c- στροφή της χελώνας στο επίπεδό της (εγγύτατο επίπεδο, καθορίζει την καμπυλότητα). Η εκτέλεση του παραπάνω κώδικα δίνει μια πολυγωνική γραμμή (στο χώρο ή στο επίπεδο) ή μια ευθεία γραμμή. Στη περίπτωση όμως που το dx θεωρηθεί πολύ μικρό (να τείνει στο μηδέν), από τον παραπάνω μικρόκοσμο μπορούν να προκύψουν τριών ειδών καμπύλες, που ουσιαστικά αντιπροσωπεύουν τις γεωδαισιακές του κυλίνδρου: Ευθείες, κύκλοι και κυλινδρικές έλικες

Γνωστοποιήσαμε στους μαθητές ότι το πρόγραμμα αυτό θα τους ήταν χρήσιμο για την εύρεση του τρόπου σχεδίασης μιας τέτοιας διαδρομής και ότι στο τέλος θα μπορούσαν να τον χρησιμοποιήσουν για να φτιάξουν τα δικά τους μοντέλα.

Στην παρούσα ανάλυση θα εστιάσουμε στον τρόπο που οι μαθητές προσέγγισαν μια καμπύλη του χώρου και στη διαδικασία μετατροπή μιας σταθερής πολυγωνικής γραμμή σε μια καμπύλη του χώρου με βασικό εργαλείο αναδρομικό κώδικα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παρούσα έρευνα είναι μια έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) με τη συμμετοχή 15 μαθητών Γ γυμνασίου και με διάρκεια 25 ωρών. Η έρευνα έλαβε χώρα στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου, με τους μαθητές να είναι χωρισμένοι σε ομάδες των δυο ή τριών ατόμων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη εξοικειωθεί με κατασκευές στη γλώσσα Logo στο περιβάλλον του Micro World Pro. Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα λογισμικό ήχου και εικόνας (Hypercam 2) το οποίο έδωσε τη δυνατότητα καταγραφής των ενεργειών των μαθητών με το λογισμικό και των συζητήσεων μεταξύ των συμμετεχόντων. Για την ανάλυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών ενδιαφερθήκαμε για τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπιδρούσαν με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις του λογισμικού και τους τρόπους με τους οποίους κατασκεύαζαν και δομούσαν τα μαθηματικά νοήματα. Σε αυτό το σημείο μας φάνηκε χρήσιμο το δόμημα των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων (situated abstractions, Noss & Hoyles, 1996). Δηλαδή, να περιγράψουμε το πώς οι μαθητές κατασκευάζουν μαθηματικές ιδέες στηριζόμενοι στις λειτουργικότητες του συγκεκριμένου λογισμικού που χρησιμοποιούν και στις μεταξύ τους συζητήσεις.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η επίλυση του προβλήματος που δόθηκε στους μαθητές, απαιτούσε την εύρεση ενός τρόπου σχεδίασης της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια στο περιβάλλον του λογισμικού. Η ανακάλυψη του τρόπου είχε ως συνέπεια τη διόρθωση του μισοψημένου μικρόκοσμου του 'σύντομου δρόμου' με βάση τη έννοια της καμπυλότητας του χώρου. Ένας τέτοιος κώδικας θα μπορούσε να έχει τη μορφή (με dx να τείνει στο μηδέν):

```
to σύντομος_δρόμος :n :dx
```

repeat :n [lr(5*:dx) lt(25*:dx) fd(:dx)]
end

Στη συνέχεια, ζητήσαμε από τους μαθητές να φτιάξουν τα δικά τους μοντέλα καμπυλών στηριζόμενοι στις γνώσεις που αποκόμισαν από τη διερεύνηση και το οποίο αποτελεί και αντικείμενο της παρούσας ανάλυσης. Θα εστιάσουμε στις προσπάθειες δυο ομάδων μαθητών (Μ1,Μ2 μαθητές) και στις στρατηγικές που ανέπτυξαν για να επιτύχουν το στόχο τους.

Το Μοντέλο των τριών φάσεων

Η πρώτη από τις δυο ομάδες χρησιμοποίησε τον κώδικα και το σχήμα της έλικας ως δομική μονάδα (bulding blog) για την κατασκευή μιας καμπύλης ενώ η δεύτερη ομάδα με βάση τις γνώσεις που αποκόμισε, κατασκεύασε μια καμπύλη χρησιμοποιώντας την έννοια της καμπυλότητας και τις τρεις κινήσεις της χελώνας: lr, lt, fd. Το χαρακτηριστικό όμως σε αυτές τις περιπτώσεις όπως και σε εργασίες άλλων μαθητών, είναι η στρατηγική που επέλεξαν για να φτάσουν στην κατασκευή της καμπύλης. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο που ακολουθήσανε ήταν ένα μοντέλο που αποτελούταν από τρεις φάσεις και μάλιστα με καθορισμένη σειρά:

Α΄φάση: κατασκευή σταθερής διαδικασίας, δηλαδή κατασκευή μιας γραμμής στο χώρο (πολυγωνικής ή συνένωση καμπυλών) με βάση ένα κώδικα όπου δεν υπεισέρχονται μεταβλητές.

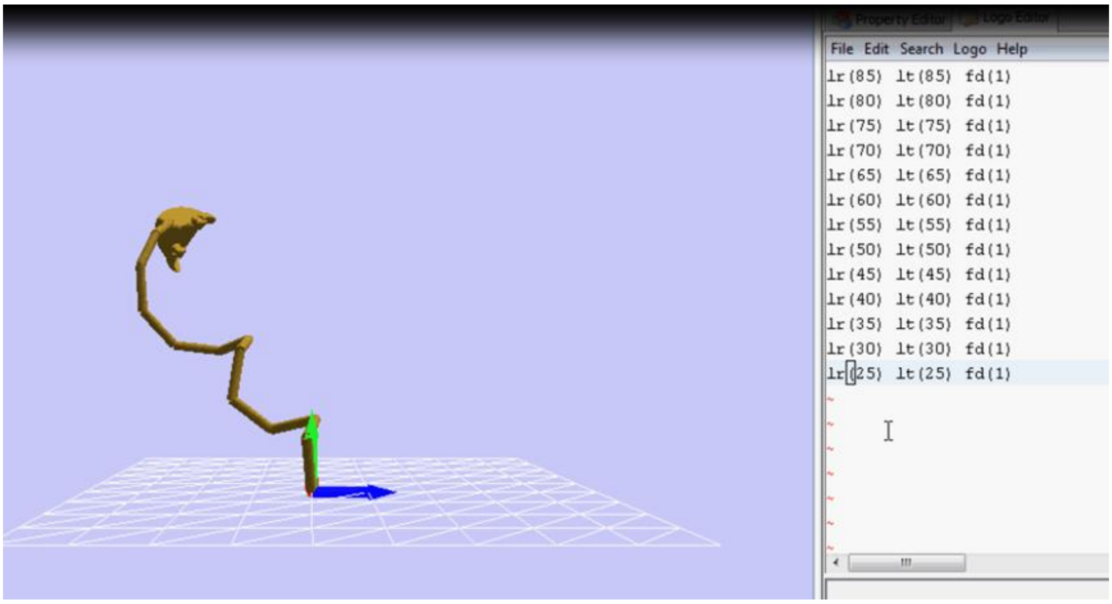
Β΄φάση: προσέγγιση καμπύλης με βάση την έννοια της καμπυλότητας και την εντολή repeat (εσφαλμένα)

Γ΄φάση: Εκσφαλμάτωση (debugging). Από την επαναληπτική στη αναδρομική μέθοδο. Διόρθωση και χρήση της αναδρομής ουράς.

Προσέγγιση καμπύλης με βάση την έννοια της καμπυλότητας και με τη χρήση του repeat

Η μια ομάδα, στο ξεκίνημα έφτιαξε μια πολυγωνική γραμμή με βάση τις τρεις κινήσεις της χελώνας: lr, lt, fd .

Ξεκινώντας από τις βασικές κινήσεις της χελώνας κατασκευάσανε μια πολυγωνική γραμμή, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2: *Η σταθερή πολυγωνική γραμμή*

Τους υπενθυμίσαμε ότι ζητούμενο ήταν η κατασκευή καμπύλης και όχι μιας πολυγωνικής γραμμής. Οι μαθητές φάνηκε να μην δυσκολεύονται για τη συνέχεια.

Μ1: Πρέπει να δουλέψουμε όπως και στην έλικα για να βρούμε τη σχέση [εννοεί να βρούνε μια σχέση για την καμπυλότητα που εκφράζεται με βάση τη γωνία ω στροφής και περιστροφής της χελώνας σε συνάρτηση με το fd. Η κατασκευή της έλικας αποτελούσε μέρος της αρχικής φάσης της διερεύνησης των μαθητών].

Αφού ανακάλυψαν την κατάλληλη σχέση : ω=-5*s+90 [ο τρόπος με τον οποίο κατέληξαν σε αυτό το συμπέρασμα δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα ανάλυση. Το s δηλώνει το μήκος της γραμμής που έχει διαγράψει η χελώνα] σχημάτισαν στο τετράδιό τους τον παρακάτω κώδικα (1) και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

```
To anoixtiri :s :n
Repeat :n [lr(-5*:s+90)  lt(-5*:s+90) fd(1)]
end
```

Ε: η εκτέλεσή του, τι σχήμα θα δώσει;

Μ1: αυτό δεν θα είναι καμπύλη

Μ2: να κάνουμε πάλι το fd πολύ-πολύ μικρό, και να ψάξουμε για να δούμε αν αυτό που βρήκαμε είναι σωστό

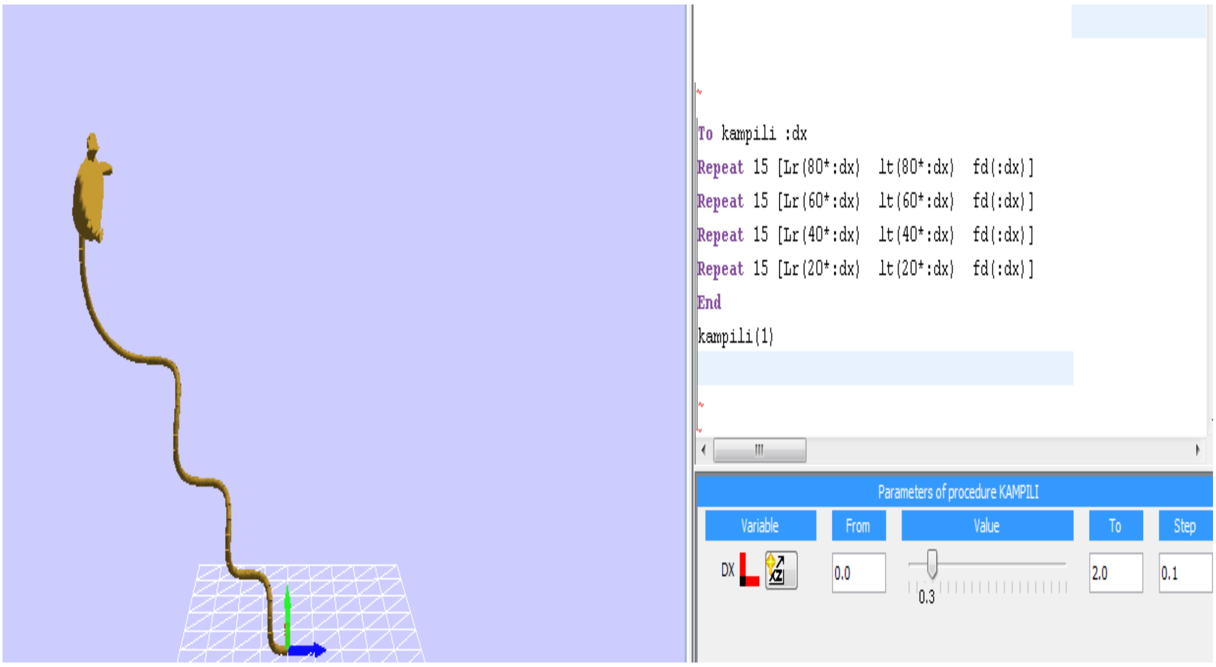
Μ1: πως θα το κάνουμε όμως αφού δεν έχουμε για παράδειγμα κάτι σαν κύλινδρο όπως στην έλικα;

Μ2: ας το αγνοήσουμε. Να θεωρήσουμε ότι θα βγουν οι ίδιες σχέσεις όπως και με το dx=1

Τα παραπάνω μας παρέχουν ενδείξεις για το ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές θεωρούν την εύρεση της καμπυλότητας απαραίτητη για την κατασκευή της αντίστοιχης καμπύλης, και το ότι η κατασκευή της μπορεί να επιτευχθεί πλέον μόνο με τις εντολές fd, lt, lr (situated abstractions, Noss & Hoyles, 1996). Σχέσεις, οι οποίες για να υπολογιστούν με μαθηματικό τρόπο χρειαζόμαστε τα αποτελέσματα των μετρήσεων για dx να τείνει στο μηδέν, γεγονός που οι μαθητές το εκφράζουν ρητά όπως αναδείχτηκε μέσα από τον διάλογό τους.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η εκτέλεση του παραπάνω κώδικα δίνει κυλινδρική έλικα και όχι κάποια καμπύλη που θα προσέγγιζε το αρχικό σχήμα της πολυγωνικής γραμμής. Οι μαθητές φαίνεται να θεωρούν ότι μεταβάλλοντας το s θα επιτευχτεί το ζητούμενο σχήμα και δεν αντιλαμβάνονται ότι χρειαζόμαστε έναν διαφορετικό τρόπο γραφής του κώδικα. Βέβαια η μεταβολή του s το μόνο που επιφέρει είναι αλλαγή στις τιμές για την καμπυλότητα της καμπύλης και άρα δίνει πάλι κυλινδρική έλικα.

Η δεύτερη ομάδα χρησιμοποιώντας τον διορθωμένο κώδικα (σελ. 4) έφτιαξε μια έλικα αλλάζοντας απλά τη καμπυλότητα. Δηλαδή, αντί για τους αριθμούς 5 και 25 αντικατέστησε τυχαία νούμερα που δίνουν όμως μια διαφορετική από την αρχική έλικα. Όταν τους ζητήσαμε να φτιάξουν άλλο σχήμα εκτός από τη έλικα, έριξαν την ιδέα να φτιάξουν ένα σχήμα με ενωμένες μεν, αλλά διαφορετικές έλικες. Στην εικόνα 3 φαίνεται ο κώδικας και ένα στιγμιότυπο (το dx δεν μεταβάλει ουσιαστικά την σχεδιαζόμενη γραμμή. Απλά για dx μικρό έχουμε καλύτερη προσέγγισή της):



***Εικόνα 3**: Καμπύλη με ενωμένες έλικες*

Ο ένας εξ αυτών παρατηρεί ότι ο παραπάνω κώδικας μπορεί να γραφτεί και διαφορετικά.

M1: αφού μέσα στον κώδικα επαναλαμβάνεται το ίδιο πράγμα να το γράψουμε πάλι με το repeat

Έτσι καταλήγουν στο παρακάτω:

```
To kampili :dx :n
Repeat :n [Repeat 15 [Lr(80*:dx)  lt(80*:dx)  fd(:dx)]]
end
```

Όταν τους ζητήσαμε να μας ερμηνεύσουν τον κώδικα, οι μαθητές αναγνώρισαν ότι κάτι άλλο έπρεπε να γίνει.

M1: το πρώτο repeat δεν είναι σωστό γιατί οι τιμές αλλάζουν

M2: ποια είναι η εντολή για να το γράψουμε σωστά; [απευθυνόμενος στον ερευνητή]

Αυτό το οποίο επισημαίνουμε προς το παρών, είναι ότι όπως η πρώτη ομάδα έτσι και η δεύτερη ως άμεση κίνηση ήταν η χρήση του repeat για να εκφράσουν συνοπτικά ένα σύνολο ίδιων εντολών, που το μόνο διαφορετικό χαρακτηριστικό τους από την μια γραμμή του κώδικα στην άλλη, ήταν οι γωνίες στροφής και περιστροφής οι οποίες μεταβάλλονταν.

Από την επαναληπτική (repeat) στην αναδρομική μέθοδο (αναδρομή ουράς)

Η συνέχεια και για τις δυο ομάδες ήταν παρόμοια, για αυτό θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια μόνο στη μια από αυτές, και συγκεκριμένα στην ομάδα με το ‘anoixtiri’.

Η εκτέλεση του κώδικα (1, σελ. 5) όμως δίνει μια κυλινδρική έλικα, αφού το s παραμένει σταθερό και ως εκ τούτου η στροφή και η περιστροφή της χελώνας είναι σταθερή. Οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να αντιληφτούν το λάθος και τον λόγο που δημιουργήθηκε η έλικα, και αποφασίζουν να διαγράψουν μόνο το repeat από τον κώδικα. Η εκτέλεση του καινούριου κώδικα τους δίνει τώρα μόνο ένα ευθύγραμμο τμήμα.

M1: αυτό είναι το αρχικό τμήμα

M2: ναι, μετά θα πρέπει να επαναλάβουμε το ίδιο αλλά με άλλες τιμές

E: τι εννοείς;

M2: θα επαναλάβουμε τον ίδιο κώδικα με άλλα νούμερα

E: πως δηλαδή;

M1: Από εκεί που σταματάμε εκτελούμε πάλι τον ίδιο κώδικα

Μετά από λίγο οι μαθητές παρουσιάζουν τον παρακάτω κώδικα:

```
To anoixtiri :s
lr(-5*:s+90) lt(-5*:s+90) fd(1)
anoixtiri(1)
anoixtiri(2)
anoixtiri(3)
anoixtiri(4)
anoixtiri(5)
anoixtiri(6)
end
anoixtiri(1)
```

Βέβαια, με την εκτέλεση αυτού του κώδικα ο υπολογιστής δείχνει να μην αποκρίνεται. Οι μαθητές απευθυνόμενοι στον ερευνητή, δείχνουν να είναι σίγουροι για την ορθότητα του κώδικα και απλά ζητάνε να τους αναφέρει την εντολή για τη γραφή του κώδικα. Ο ένας από τους μαθητές αναφέρει:

Μ1: Δεν υπάρχει κάποια κομψή εντολή για να το γράψουμε;

Εδώ όμως αξίζει να παρατηρήσουμε κάποια σημαντικά στοιχεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές και έχουν σχέση με την έννοια της αναδρομής ουράς. Το ένα είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα τμήμα ως αρχικό, ως βάση, και το άλλο είναι η χρήση της ιδέας της αυτό-αναφοράς, μια έννοια που παραπέμπει στην έννοια της αναδρομής.

Ο παραπάνω κώδικας φαίνεται να αποτελεί το ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ των δυο μοντέλων: αναδρομής και επανάληψης (recursion vs iteration). Περιέχει βέβαια στοιχεία που παραπέμπουν στην έννοια της αναδρομής, αλλά ο τρόπος που οι μαθητές γράφουν τις εντολές με βάση το όνομα ‘anoixtiri’ παραπέμπει σε επαναληπτικές διαδικασίες αφού αυτές κατά κάποιο τρόπο για τους μαθητές εκτελούνται και δεν αναστέλλονται όπως συμβαίνει στην αναδρομή.

Ο Harvey (1997) όρισε την αναδρομή ως μια διαδικασία (process or function) η οποία καλεί τον εαυτό της ή χρησιμοποιεί την ίδια ως υποδιαδικασία. Επισημαίνει επίσης ότι στην επανάληψη (repeat), η διαδικασία πάντα επαναλαμβάνει ένα συγκεκριμένο αριθμό εντολών χωρίς μεταβολές ενώ στην αναδρομή η ίδια η διαδικασία καλείται με κάποιες νέες τιμές. Αν και μια επαναληπτική διαδικασία μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια αναδρομής, και αντιστρόφως, οι μαθητές φαίνεται να υιοθετούν τελικά έννοιες που προσεγγίζουν πολλές από τις βασικές πτυχές της αναδρομής ουράς. Φαίνεται η αυτό-αναφορά να αποτελεί έναν μηχανισμό για τη γραφή επανάληψης εντολών και αυτό θα μπορούσε, για τους μαθητές, να επιτευχθεί καλύτερα με μια πιο ‘κομψή εντολή’. Να επισημάνουμε βέβαια και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν ενδιαφέρονται για το πότε θα ολοκληρωθεί η διαδικασία. Αυτό πιθανόν να έχει να κάνει με το γεγονός ότι από μαθηματικής πλευράς για την κατασκευή μιας καμπύλης, δεν χρειαζόμαστε stop condition, μιας και ο χρόνος απόκρισης δεν είναι κρίσιμος για τη εφαρμογή μας. Για αυτούς, μια καμπύλη προεκτείνεται απεριόριστα.

Η γραφή όμως ενός κώδικα με βάση την αναδρομή ουράς είναι μια δύσκολη περίπτωση. Θέλοντας ο ερευνητής να τους βοηθήσει στον τρόπο γραφής (και όχι κατά ανάγκη στη κατανόηση του τρόπου ροής του κώδικα), τους έθεσε βοηθητικές ερωτήσεις, όπως για παράδειγμα: Ποια μεταβλητή έχουμε; Πως θα ενσωματώσουμε όλα αυτά που γράφεται :anoixtri(1), anoixtri(2),...σε μια εντολή; Όμως, όπως πολύ συχνά έχει αναφερθεί σχετικά με την έννοια της αναδρομής ‘το να οδηγήσεις ένα αυτοκίνητο δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζεις και τον τρόπο που η μηχανή του λειτουργεί’.

Το αποτέλεσμα ήταν ο ακόλουθος κώδικας:

```
To anoixtiri :s
lr(-5*:s+90) lt(-5*:s+90) fd(1)
anoixtiri(:s-1)
end
```

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ακολουθώντας μια κονστρακτιονιστική προσέγγιση (Kafai and Resnick, 1996), στόχος μας ήταν να μελετήσουμε 'τα μαθηματικά νοήματα που δομούν οι μαθητές, δηλαδή τι καταλαβαίνουν και πως αυτή η κατανόηση αναπτύσσεται' (Κυνηγός, 2006, σελ. 129).

Ένα κοινό χαρακτηριστικό στις προσπάθειες των μαθητών, ήταν η στρατηγική που ακολούθησαν για να κατασκευάσουν έναν κώδικα στη γλώσσα Logo που να τους δίνει την προσέγγιση μιας καμπύλης του χώρου. Το μοντέλο των τριών φάσεων για την κατασκευή μιας καμπύλης στο χώρο: [Κατασκευή σταθερής διαδικασίας(σταθερή πολυγωνική γραμμή) –Προσέγγιση της καμπύλης με βάση την έννοια της καμπυλότητας και την εντολή repeat (εσφαλμένα) – Εκσφαλμάτωση, από την επαναληπτική στη αναδρομική μέθοδο], φάνηκε να είναι για τους περισσότερους μαθητές το κυρίαρχο μοντέλο στην κατασκευή μιας καμπύλης στο χώρο. Αν και στην δεύτερη φάση οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα λανθασμένο 'θεώρημα εν δράσει' (Vergnaud,2009), εντούτοις χρησιμοποιήθηκε από τους περισσότερους μαθητές ως σκαλοπάτι για την έννοια της αναδρομής ουράς (να σημειώσουμε ότι η έννοια της αναδρομής ήταν για τους μαθητές μια έννοια άγνωστη). Το περιβάλλον και η LTT μέθοδος οδήγησε τους μαθητές στην υιοθέτηση μιας αναδρομικής διαδικασίας και όπως αποδείχτηκε, το μόνο πρόβλημα τους ήταν να μετατρέψουν την συνολική διαδικασία σε μια 'κομψή εντολή', όπως χαρακτηριστικά ειπώθηκε.

Βέβαια, δεν ισχυριζόμαστε ότι οι μαθητές κατανόησαν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η έννοια της αναδρομής ουράς. Οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποίησαν έννοιες και λέξεις για να εκφραστούν που δεν έχουν σχέση με τις καθιερωμένες έννοιες όπως για παράδειγμα την έννοια της αναδρομής. Αλλά μέσα από τις συζητήσεις τους και τον τρόπο που χειρίζονταν τις εντολές, αναδείχτηκαν μερικές βασικές όψεις της έννοιας της αναδρομής ουράς. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές υιοθετούν αντιλήψεις σχετικά με την αναδρομή, όπως για παράδειγμα η έννοια της αυτό-αναφοράς (Levy & Lapidot, 2001), αλλά και το ότι η έννοια της επανάληψης για αυτούς έπρεπε να αντικατασταθεί με μια 'κομψή εντολή', η οποία να ενσωματώνει τα εξής στοιχεία: μια διαδικασία που να κατασκευάζει το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα και την επανάληψη όχι απλά αυτού του τμήματος, αλλά του ονόματος της διαδικασίας αλλά με διαφορετικά εισαγόμενα. Οι Tung et al, (2001), υποστηρίζουν ότι, έχοντας οι μαθητές ένα έστω και ανεπαρκές μοντέλο αναδρομής, μπορούμε μέσα από τον πειραματισμό και την εκσφαλμάτωση να το αναπτύξουμε και να το μεταβάλλουμε.

Τέλος, σημαντικό θεωρούμε και το γεγονός με το οποίο οι μαθητές προσπάθησαν να ανακαλύψουν, με το δικό τους τρόπο, την έννοια της καμπυλότητας εκείνης της πολυγωνικής γραμμής που είχανε κατασκευάσει. Δεν αρκέστηκαν στις αναλογικές σχέσεις μεταξύ της στροφής και της σταθερής τιμής για το dx με dx =1, αλλά εκφράσανε και την άποψη ότι θα έπρεπε να πειραματιστούν και με μικρότερες τιμές του dx, γεγονός που παραπέμπει άμεσα στην έννοια της καμπυλότητας του χώρου.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κυνηγός, Χ.(2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Εκδ. Ελληνικά γράμματα

Anazi, Y. & Uesato, Y.(1982). *Is Recursive Computation difficult to Learn?*, PA: Psychology Department, Carnegie-Mellon University, Pittsburg.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, Vol. 32-1, 9-13.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 55-85.

Harvey, B. (1997), *Iteration, Control Structures, Extensibility. Computer Science Logo Style, volume 2: Advanced Techniques 2/e*, Cambridge, MA: The MIT Press.

Kafai, Y. and Resnick, M. (eds.) (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world.* Lawrence Erlbaum Publishers, Mahwah

Kurland, D. M. & Pea, R. D.: 1983, "Children's mental model of recursion LOGO programs", *Proceedings of the 5th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Rochester*, NY, pp. 1-5.

Kynigos, C. (2007). Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, *Informatics in Education,* 2007, Vol. 6, No. 2, 1–24, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year-olds meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. In N. A. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 165–172). Honolulu, Hawaii, U.S.A: PME.

Levy, D., & Lapidot, T. (2000). Recursively speaking: analyzing students' discourse of recursive phenomena, *Proceedings of the thirty-first SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education, Austin*, Texas, United States. 315-319.

Loethe H., (1992). *Conceptually Defined Turtles, in: (Hoyles, D. and Noss, R. eds.), Learning Mathematics and Logo*, The MIT Press,

Mirolo, C. (2010). Learning (through) recursion: a multidimensional analysis of the competences achieved by CS1 students. *Proceedings of the 15th annual SIGCSE conference on Innovation and Technology in Computer Science Education*. Bilkent, Ankara, Turkey.160-164.

Noss,R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Scholtz, T.L., & Sanders, I. (2010). Mental models of recursion: Investigating students' understanding of recursion. *Proceedings of the 15th Annual SIGCSE Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education*, Bilkent, Ankara, Turkey.103-107.

Sooriamurthi, R. (2001) "Problems in comprehending recursion and suggested solutions", *Proceedings of the 6th Annual SIGCSE Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education*, pp. 25-28.

Tung, S. H., Chang, C., Wong, W. K., and J. C. J. Jehng (2001), Visual representation for recursion. Int. J. Human – *Computer studies*, 54, pp. 285-300.

Turbak, F., Royden, C., Stephan, J., and Herbst, J. (1999), „Teaching Recursion Before Loops in CS1‟, *Journal of Computing in small colleges,* Vol. 14, No 4, pp. 86-101.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.*), Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*,52:83-94.

Wilensky, U. (2010). Restructurations: Reformulating knowledge disciplines throw new representational forms. *In J. E. Clayson & I.Kalas (Ed), constructionism 2010* Paris, France

Yerushalmy, M., and Schwartz, J.L. (1999) A procedural approach to exploration in calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (6), 903-914.

Zantzos I. and Kynigos C., (2012). Differential approximation of a cylindrical helix by secondary school students. *Constructionism 2012 Theory, Practice and Impact*. Athens, Greece