Κλασμοειδή:
Αυτοομοιότητα – Διάσταση – Περίμετρος – Εμβαδόν

Ευάγγελος Ν. Παναγιώτου

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
vapana@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Που είναι οι ευθείες και οι κύκλοι στη φύση; Τα γεωμετρικά σχήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν επαρκούν για να περιγράψουν την περίπλοκη ομορφιά της φύσης. Όμως, κάτω από την πολυπλοκότητα των φυσικών εικόνων, ο Mandelbrot (1983) βρήκε απλότητα μέσω γεωμετρικών επαναληπτικών διαδικασιών. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται ένα σενάριο με θέμα την μοντελοποίηση εικόνων του φυσικού κόσμου αξιοποιώντας την επαναληπτική δομή του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Logo για το σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων που είναι γνωστά ως κλασμοειδή. Οι δραστηριότητες δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές για παρατήρηση, ανάπτυξη υποθέσεων, διερεύνηση, σχεδιασμό και πειραματισμό που είναι πολύτιμα για την εμπλοκή των μαθητών και την εμβάθυνση της μαθηματικής τους σκέψης. Το συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο έχει αρχικά υλοποιηθεί, στα πλαίσια των καινοτόμων δράσεων, σε μία τάξη Β΄ Λυκείου με ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *κλασμοειδές, αυτό-ομοιότητα*, *επαναληπτική διαδικασία, διάσταση, χελωνόκοσμος*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα γεωμετρικά σχήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν επαρκούν για να περιγράψουν τη φυσική πραγματικότητα: *«τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτές δεν είναι κύκλοι, ούτε το φως ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή»* (Mandelbrot, 1983). Ο Benoit Mandelbrot (1924-2010) επινόησε την *κλασμοειδή γεωμετρία* (fractal geometry) για να περιγράψει τον πολύπλοκο σχεδιασμό της φύσης. Ένα *κλασμοειδές* (fractal) είναι ένα «κατακερματισμένο» (fragmented) γεωμετρικό σχήμα που μπορεί να χωριστεί σε τμήματα, καθένα από τα οποία είναι ένα αντίγραφο του όλου σε σμίκρυνση. Αυτό το χαρακτηριστικό των κλασμοειδών, όπου κάθε μικρό μέρος φαίνεται ακριβώς όπως το όλο, ονομάζεται *αυτό-ομοιότητα*. Κάθε δάσκαλος ενδιαφέρεται για μαθηματικές ιδέες που θα προκαλέσουν την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών. Τα κλασμοειδή μπορεί να είναι μία από αυτές αφού έχουν αναγνωριστεί ως ένα πολύ καλό εργαλείο για τη μοντελοποίηση της φύσης και ιδιαίτερα εκείνων των περιπτώσεων στις οποίες εμφανίζεται η αυτό-ομοιότητα. Με την παρούσα εργασία δίνεται στους μαθητές μια από τις σπάνιες ευκαιρίες να πληροφορηθούν αλλά και να εργαστούν πάνω σε νέες ιδέες, στις οποίες αφιερώνεται ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης έρευνας.

Η γλώσσα Logo, με την απλότητα και τη δύναμή της, προσφέρει ένα κατάλληλο περιβάλλον για δραστηριότητες στο πεδίο της κλασμοειδούς γεωμετρίας. Η απλότητα της γλώσσας Logo επιτρέπει τη σύνταξη εντολών για την πραγματοποίηση βασικών διαδικασιών της κλασμοειδούς γεωμετρίας και η δύναμη της Logo επιτρέπει την υλοποίηση αυτών των διαδικασιών και τη δημιουργία περίπλοκων σχημάτων. Η βασική έννοια που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία κλασμοειδών με το Χελωνόκοσμο είναι η επαναληπτική διαδικασία. Αυτό το πανίσχυρο χαρακτηριστικό της Logo βοηθάει στην απλοποίηση των περίπλοκων και συνεχών διαδικασιών που πραγματοποιούνται όταν σχεδιάζονται κλασμοειδή. Η στατικότητα των μέσων που έχουν στη διάθεσή τους οι μαθητές δεν ευνοεί την αναπαράσταση του δυναμικού χαρακτήρα των κλασμοειδών. Θεωρητικά, ένα κλασμοειδές είναι το οριακό αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας επαναληπτικής διαδικασίας άπειρες φορές, και αυτό δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να συναντήσουν, γεωμετρικά και αλγεβρικά, την πάντα προκλητική και δυσπρόσιτη έννοια του απείρου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση των κλασμοειδών και της έννοιας της κλασμοειδούς διάστασης προσεγγίζονται στα πλαίσια του εννοιολογικού πεδίου του Vergnaud (1991), σύμφωνα με το οποίο κάθε μαθηματική έννοια δεν είναι ποτέ αποστασιοποιημένη από τους τρόπους χρήσης της, τους τρόπους αναπαράστασής της και τις άλλες έννοιες που συνδέονται στενά με αυτή.

Οι πιο στενοί συγγενείς των εν λόγω εννοιών είναι τα Ευκλείδεια σχήματα και η (τοπολογική) διάστασή τους. Η σύνδεση επιτυγχάνεται με τη διαδικασία της μοντελοποίησης, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για να βρεθούν λύσεις (που είναι ένας από τους κύριους στόχους της) αλλά και για να εξηγήσει φαινόμενα (Less and Doer, 2003). Αν και υπάρχουν διάφορα είδη μοντέλων (εξισώσεις, φυσικές μακέτες, κ.ά.), τα σύγχρονα μοντέλα δημιουργούνται συχνά με λογισμικά, με τη μορφή προσομοίωσης (Jonassen, 2006). Οι προσομοιώσεις είναι, γενικά, απομιμήσεις της πραγματικότητας. Όμως, οι προσομοιώσεις μέσω των μικρόκοσμων, όπως ορίζονται από τον Papert (1980), είναι εναλλακτικές «πραγματικότητες», που σκοπός τους δεν είναι η απομίμηση, αλλά να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν, να οπτικοποιήσουν και να επανεξετάσουν τους αόρατους μηχανισμούς σε κάποια ενδιαφέροντα φαινόμενα. Πρόκειται για μάθηση μέσα από την κατασκευή (constructionism) (Harel & Papert, 1991), κατά την οποία το χρησιμοποιούμενο λογισμικό, ο Χελωνόκοσμος, ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να τις εκφράσουν με τη χρήση συμβόλων, να τις εκτελέσουν στον Η/Υ, να παρατηρήσουν άμεσα το αποτέλεσμά τους και να τις τροποποιήσουν αν αυτό δεν είναι εκείνο που επιδίωκαν πριν από την εκτέλεση. Ο μαθητής μπορεί να τροποποιήσει το αποτέλεσμα διορθώνοντας τις εντολές προγραμματισμού.

Επίσης, στην υλοποίηση του σεναρίου, αξιοποιείται η σημασία της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας στη διδασκαλία (Yackel & Cobb, 1996, Mercer, 1996).

ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Το θέμα του σεναρίου δεν περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Η εφαρμογή έγινε σε ένα τμήμα της Β΄ Λυκείου, με 20 μαθητές, στα πλαίσια Ερευνητικής Εργασίας με θέμα τις ΤΠΕ. Για την υλοποίηση του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 6-7 διδακτικές ώρες. Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Ως προς τα μαθηματικά, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν: την έννοια της γωνίας και της μέτρησής της, της περιμέτρου, του εμβαδού, της ομοιότητας και των ιδιοτήτων της, λογαρίθμους και τις ιδιότητές τους, την έννοια της ακολουθίας και του αναδρομικού τύπου, της γεωμετρικής προόδου και του αθροίσματος των απείρων όρων και κάποιες γνώσεις στα όρια. Ως προς την τεχνολογία, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τη δημιουργία, ερμηνεία και διόρθωση απλών προγραμμάτων σε γλώσσα Logo που περιέχουν παραμετρικές διαδικασίες (χρήση μεταβλητών) και να είναι εξοικειωμένοι με την λειτουργία του μεταβολέα και τη χρήση του για το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών ποσοτήτων.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία: Τετράδιο – φύλλα εργασίας – διαδραστικός πίνακας ή προβολέας δεδομένων - ηλεκτρονικοί υπολογιστές - το λογισμικό Χελωνόκοσμος – οδηγίες χρήσης του λογισμικού.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης: Οι μαθητές εργαζόμενοι σε εταιρικές ομάδες και καθοδηγούμενοι από ένα κοινό φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, τους καθοδηγεί και τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση. Όταν ο εκπαιδευτικός το κρίνει απαραίτητο, διακόπτεται η εργασία σε ομάδες, γίνεται συντονισμένος διάλογος στην ολομέλεια για την επίλυση αποριών στον πίνακα ή στον διαδραστικό πίνακα και αξιοποιείται η τεχνική της επίδειξης με τη χρήση του προβολέα δεδομένων.

ΣΤΟΧΟΙ

Να κατανοήσουν, εφαρμόζοντας επαναληπτικούς αλγορίθμους, πως η κλασμοειδής γεωμετρία περιγράφει φυσικά φαινόμενα με το χαρακτηριστικό της αυτο-ομοιότητας.

Να αναγνωρίζουν το χαρακτηριστικό της αυτο-ομοιότητας σε μια δοσμένη εικόνα και να ανακαλύπτουν τον αλγόριθμο που την περιγράφει.

Να επεκτείνουν την έννοια των γνωστών 3 διαστάσεων του χώρου ώστε να συμπεριλάβει και κλασματικές διαστάσεις, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα περισσότερα κλασμοειδή.

Να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους για τις γεωμετρικές προόδους και το άθροισμα των απείρων όρων τους.

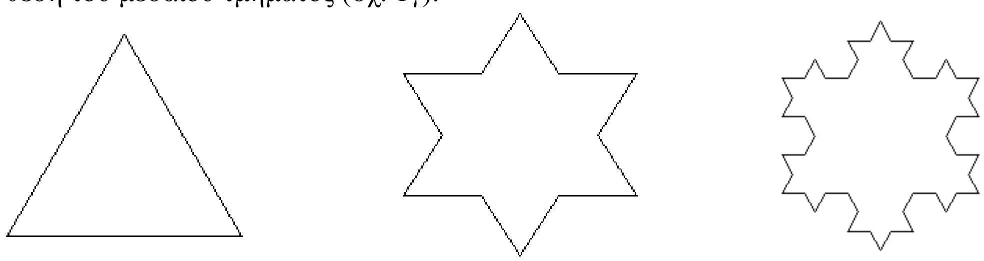
Να συγκρίνουν τις έννοιες περιμέτρου και εμβαδού και να προβληματιστούν με τα ‘‘λογικά παράδοξα’’ που προκύπτουν.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

ΦΑΣΗ $1^{η}$ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΛΑΣΜΟΕΙΔΩΝ.

Γίνεται ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει. Για το σκοπό αυτό γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στα κλασμοειδή, η οποία καλό είναι να συνοδεύεται από φωτογραφικό υλικό ώστε να γίνει και επισήμανση της αυτό-ομοιότητας που παρουσιάζει η φύση σε πολλές περιπτώσεις (για παράδειγμα, ένα δέντρο, μία φτέρη, το αρτηριακό σύστημα, κ.ά.) (Barnsley, 1988; MacGuire, 1991; Mandelbrot, 1983).

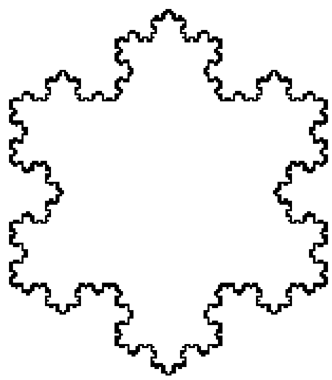
Η *χιονονιφάδα* είναι ένα γνωστό κλασμοειδές, το οποίο περιέγραψε ο Σουηδός μαθηματικός Helge von Koch (1870-1924) το 1904. Η κατασκευή της χιονονιφάδας αρχίζει με ένα ισόπλευρο τρίγωνο (σχ. 1 α). Στο πρώτο στάδιο της κατασκευής η κάθε πλευρά διαιρείται σε τρία ίσα μέρη, κατασκευάζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο στο μεσαίο μέρος και διαγράφεται το μεσαίο τμήμα (σχ 1β). Στο δεύτερο βήμα της κατασκευής επαναλαμβάνεται το πρώτο στάδιο σε κάθε μια από τις 16 πλευρές, δηλαδή κάθε πλευρά διαιρείται σε τρία τμήματα, το μεσαίο παραλείπεται και δύο πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου σχεδιάζονται στη θέση του μεσαίου τμήματος (σχ. 1γ).



Σχ. 1(α): Αρχικό στάδιο **Σχ. 1(β):** Στάδιο 1 **Σχ. 1(γ):** Στάδιο 2

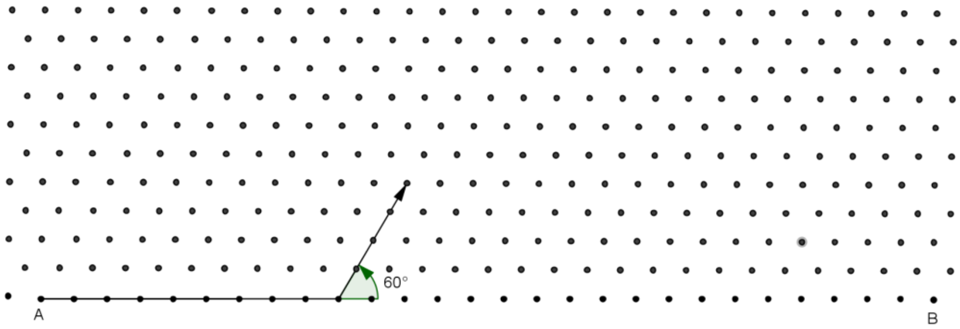
Σχήμα 1: Τα πρώτα στάδια κατασκευής της χιονονιφάδας του Koch

Στο σχήμα 2 βλέπετε την εικόνα στο στάδιο 6. Αν εφαρμόσουμε σε κάθε πλευρά την παραπάνω επαναληπτική διαδικασία άπειρες φορές, το οριακό σχήμα θα είναι η χιονονιφάδα του Koch.



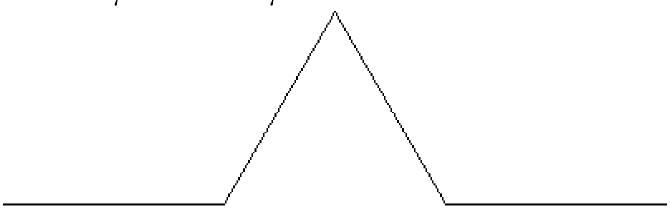
Σχήμα 2: Το $6^{ο}$ στάδιο στην κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch

Η πρώτη φάση του σεναρίου έχει σκοπό τη γνωριμία με τα κλασμοειδή και γίνεται με δύο φύλλα εργασίας. Το ΦΕ1 έχει τέσσερις δραστηριότητες. Με τις πρώτες τρεις οι μαθητές καθοδηγούνται να κατασκευάσουν αρχικά με μολύβι και χαρτί την μια πλευρά του κλασμοειδούς για τα πρώτα τρία στάδια (σχ. 3).



Σχήμα 3: Κατασκευάζοντας την μία πλευρά της χιονονιφάδας στο 1ο στάδιο, αρχίζοντας από το Α και τελειώνοντας στο Β.

Με αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν πως γίνονται οι διαδοχικές κατασκευές ώστε στη συνέχεια, στη δραστηριότητα 4, να μπορούν να γράψουν τις κατάλληλες εντολές στη γλώσσα Logo για να πραγματοποιήσει η χελώνα αυτές τις πορείες. Στη δραστηριότητα 4 αφιερώνεται, ανάλογα με το βαθμό εξοικείωσης των μαθητών με το Χελωνόκοσμο, αρκετός χρόνος (ενδεχομένως 2 ώρες). Για το σχήμα 4 στην πρώτη δραστηριότητα, που είναι και ο γεννήτορας της πλευράς της χιονονιφάδας, αναμένεται να γράψουν τη διαδικασία:
μ 150/3 α 60 μ 150/3 δ 120 μ 150/3 α 60 μ 150/3



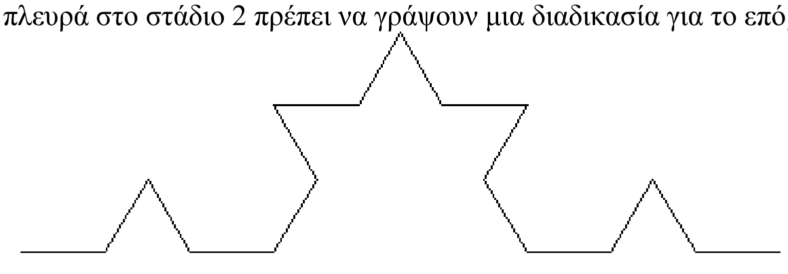
Σχήμα 4: Η πλευρά της χιονονιφάδας στο 1ο στάδιο

Αμέσως θα διαπιστώσουν ότι πρέπει να προνοήσουν ώστε η χελώνα να βρίσκεται σε κατάλληλη θέση για να πάρουν τις εικόνες που περιμένουν. Με πειραματισμό διαπιστώνουν ότι ένα κατάλληλο σημείο εκκίνησης είναι, για παράδειγμα: *σπ δ 90 π 220 σκ*

Η επιθυμία να προσαρμόζουν το σχήμα στην οθόνη τους προκαλεί ανάγκη εισαγωγής της μεταβλητής. Έτσι η διαδικασία για το γεννήτορα μπορεί να γραφεί:
για στάδιο1 :α
μ :α/3 α 60 μ :α/3 δ 120 μ :α/3 α 60 μ :α/3
τέλος
στάδιο1 200

Με το μεταβολέα μπορούν τώρα να αυξομειώνουν το σχήμα ανάλογα με τις επιθυμίες τους.

Για την πλευρά στο στάδιο 2 πρέπει να γράψουν μια διαδικασία για το επόμενο σχήμα 5:



Σχήμα 5: Η πλευρά της χιονονιφάδας στο 2ο στάδιο

Οι μαθητές μπορούν να γράψουν οποιαδήποτε διαδικασία. Θα ήταν επιθυμητό να γράψουν:
για στάδιο2 : α
στάδιο1 :α/3 α 60 στάδιο1 :α/3 δ 120 στάδιο1 : α/3 α 60 στάδιο1 :α/3
τέλος
στάδιο2 400

Ο τελικός σκοπός μας είναι να αναφερθούμε στην κατασκευή μιας επαναληπτικής διαδικασίας που θα εκφράζει τον αυτο-επαναληπτικό χαρακτήρα της κατασκευής της πλευράς της χιονονιφάδας. Στη επαναληπτική διαδικασία προστίθεται και άλλη μια μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το στάδιο της κατασκευής. Αυτή η μεταβλητή χρησιμοποιείται και για τον τερματισμό της διαδικασίας. Το βασικό χαρακτηριστικό της επαναληπτικής διαδικασίας είναι ότι κάθε εντολή μπροστά (μ) του σταδίου 1 αντικαθίσταται με ένα κάλεσμα στην ίδια τη διαδικασία. Αυτό το χαρακτηριστικό γεννάει τα αυτο-όμοια σχήματα σε κάθε επίπεδο. Η επαναληπτική διαδικασία είναι η εξής:
για χιονοπλευρά :α :ν
αν :ν=0 [μ :α σταμάτησε]
χιονοπλευρά :α/3 :ν-1
α 60
χιονοπλευρά :α/3 :ν-1
δ 120
χιονοπλευρά :α/3 :ν-1
α 60
χιονοπλευρά :α/3 :ν-1
τέλος
σβγ
χιονοπλευρά 400 0

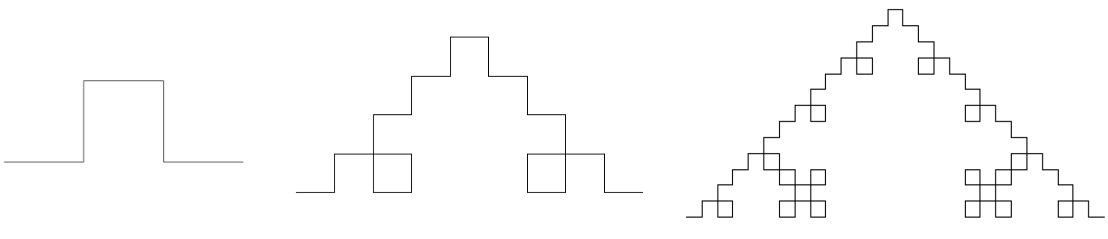
Η δοκιμή με διάφορες τιμές του ν είναι πράγματι εντυπωσιακή.

Στη συνέχεια μεσολαβούν κάποια ερωτήματα για την αναγνώριση της αυτο-ομοιότητας και ερχόμαστε τελικά στην κατασκευή μερικών όρων της οριακής διαδικασίας που οδηγεί στην χιονονιφάδα. Στο τέλος της δραστηριότητας θα έχουμε καταλήξει στις διαδικασίες:

για εκκίνηση
θέσεχψ -150 -30
α 60
τέλος
εκκίνηση

για χιονιφάδα :α :ν
επανάλαβε 3[χιονοπλευρά :α :ν δ 120]
τέλος

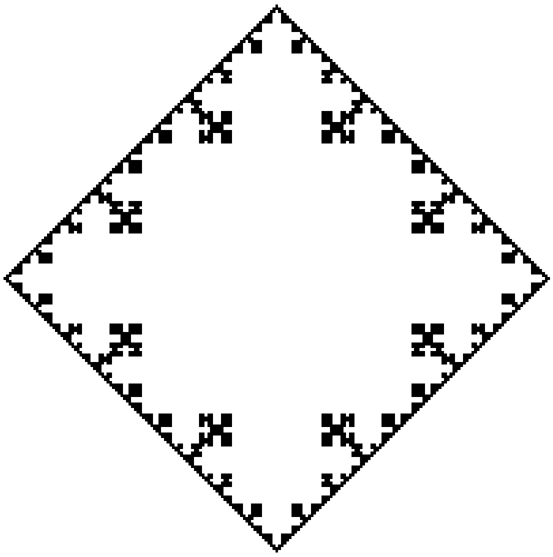
Το ΦΕ 2 έχει την ίδια δομή με το ΦΕ 1. Το αρχικό τμήμα χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα, στο μεσαίο κατασκευάζεται ένα τετράγωνο και παραλείπεται το μεσαίο τμήμα. Τα πρώτα στάδια της κατασκευής φαίνονται στο επόμενο σχήμα 6.



Σχ. 6(α): Στάδιο 1 (γεννήτορας) **Σχ. 6(β):** Στάδιο 2 **Σχ. 6(γ):** Στάδιο 3

Σχήμα 6: Τα πρώτα στάδια κατασκευής της χιονονιφάδας του Koch

Το πρόγραμμα στη γλώσσα Logo προκύπτει με προφανείς αλλαγές στο πρόγραμμα κατασκευής της χιονονιφάδας του Koch. Η διαδικασία εφαρμόζεται τώρα στις πλευρές ενός τετραγώνου και δίνει μια **τετραγωνική** χιονονιφάδα (σχ. 7).

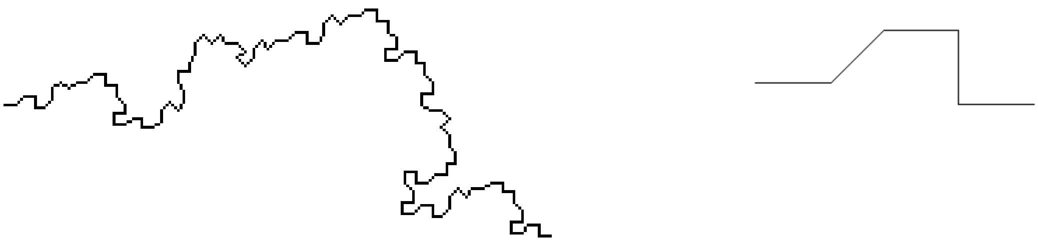


Σχήμα 7: Το 6^{ο} στάδιο στην κατασκευή της τετραγωνικής χιονονιφάδας

ΦΑΣΗ 2^{η} – Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Με το ΦΕ3 δίνονται δραστηριότητες που αναφέρονται στην αντίστροφη διαδικασία. Δίνονται στους μαθητές σχήματα που μοιάζουν με εικόνες φυσικών καταστάσεων και οι μαθητές καλούνται να εξετάσουν τα αυτό-όμοια χαρακτηριστικά του σχήματος. Οι μαθητές πρέπει να ανακαλύψουν το γεννήτορα, να γράψουν ένα πρόγραμμα στο Χελωνόκοσμο, να τρέξουν το πρόγραμμα και να ελέγξουν αν το σχήμα που δημιουργείται συμπίπτει ή μοιάζει με το δοσμένο σχήμα ή εικόνα. Η υλοποίηση της αντίστροφης διαδικασίας είναι ένα πολύ ισχυρό κριτήριο κατανόησης (π.χ., Sierpinska, 1994). Το ΦΕ3 μπορεί να δοθεί και σαν εργασία για το σπίτι. Αλλά και σε αυτή την περίπτωση, την επόμενη διδακτική ώρα πρέπει να αφιερωθεί κάποιος χρόνος για τη συζήτηση των ανακαλύψεων που έκαναν οι μαθητές επεξεργαζόμενοι τις δραστηριότητες. Για παράδειγμα, στην επόμενη ακτογραμμή αναμένεται να ανακαλύψουν το διπλανό γεννήτορα (σχ. 8).

Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν με γεννήτορες δικής τους έμπνευσης ώστε να δημιουργήσουν κλασμοειδή με φυσικά χαρακτηριστικά.



Σχήμα 8: Μία «ακτογραμμή» και ο γεννήτοράς της

ΦΑΣΗ 3^{η} - ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΟΕΙΔΩΝ

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφοροι ορισμοί διάστασης (Mandelbrot, 1983). Ο Mandelbrot (στο ίδιο) όρισε αρχικά ένα κλασμοειδές σαν ‘‘το σύνολο του οποίου η Hausdorff – Besicovitch διάσταση υπερβαίνει την τοπολογική διάσταση’’. Πιο πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι μια ευθεία γραμμή, η οποία έχει τοπολογική διάσταση ένα, μπορεί με κάποιο τρόπο να μετασχηματιστεί (π.χ. με πολλές στροφές) ώστε να αρχίσει να ‘‘γεμίζει’’ ένα μέρος του επιπέδου. Έτσι, το αποτέλεσμα έχει διάσταση μεγαλύτερη από ένα. Σε αυτά τα σχήματα παρατηρείται συχνά και το φαινόμενο της αυτοομοιότητας. Τότε είναι πιο εύχρηστη η λεγόμενη *διάσταση αυτό-ομοιότητας*, την οποία εξηγούμε στα επόμενα.

Παρατηρώντας τις δύο χιονονιφάδες στα ΦΕ1 και ΦΕ2 διερωτάται κανείς αν είναι γραμμές ή επιφάνειες, δηλαδή αν έχουν διάσταση 1 ή διάσταση 2. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται γενικεύοντας μια γνωστή σχέση (Kern & Mauk, 1990): Αν δύο σχήματα σ και Σ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ τότε, ανάλογα με τη διάσταση, τα μήκη τους (μ, Μ), τα εμβαδά τους (ε, Ε) και οι όγκοι τους (v, V) συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\frac{\mu}{M} = \lambda, \qquad \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}} = \lambda^2, \qquad \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}} = \lambda^3$$

Με σκοπό τη γενίκευση και στα κλασμοειδή, οι μαθητές καθοδηγούνται στο ΦΕ4 να γράψουν αυτή τη σχέση ως εξής:

$$\lambda^{\delta} = \frac{1}{N}$$

όπου Ν είναι ο αριθμός των συνιστωσών πλευράς λ από τις οποίες σχηματίζεται ο γεννήτορας στην αντίστοιχη διάσταση. Για παράδειγμα, ο γεννήτορας στη χιονονιφάδα του Koch έχει Ν = 4 συνιστώσες μήκους λ = 1/3 (σχ. 4).

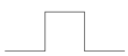
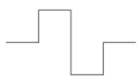
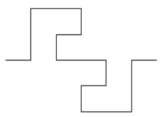
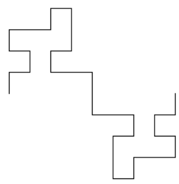
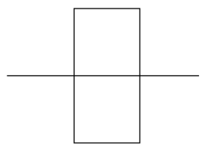
Οπότε

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\delta} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3^{\delta} = 4 \Leftrightarrow \delta \ln 3 = \ln 4 \Leftrightarrow \delta = \frac{\ln 4}{\ln 3} \Leftrightarrow \delta = 1{,}2618...$$

Ώστε η χιονονιφάδα του Koch έχει διάσταση δ = 1,26. Μια τιμή που εκφράζει και την εντύπωση που δίνει σαν κάτι μεταξύ γραμμής και επιφάνειας.

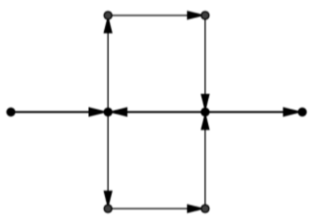
Η τιμή της διάστασης είναι ένα μέτρο της πολυδιάσπασης του κλασμοειδούς ή διαφορετικά ένα μέτρο του πόσο χώρο ‘‘γεμίζει’’. Για να αντιληφθούν αυτό το χαρακτηριστικό και οι μαθητές σχεδιάζονται κάποιες δραστηριότητες. Δίνονται διάφοροι γεννήτορες και οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τη διάσταση των κλασμοειδών που θα προκύψουν οριακά, να γράψουν μια διαδικασία και να την εκτελέσουν για να βρουν την εικόνα τους σε κάποιο στάδιο (βασικά από το 5^{o} και μετά).

Στο ΦΕ4, στη δραστηριότητα 3, δίνονται 5 γεννήτορες (ο πρώτος παράγει την τετραγωνική χιονονιφάδα του ΦΕ 2) (πίνακας 1). Οι μαθητές καλούνται: (α) να βρουν τη διάσταση του κλασμοειδούς που παράγεται οριακά από τον κάθε γεννήτορα, (β) για κάθε γεννήτορα να γράψουν μια διαδικασία κατασκευής στη γλώσσα Logo, (γ) να εφαρμόσουν τη διαδικασία στις πλευρές ενός τετραγώνου για διάφορα στάδια, και τέλος (δ) να εξετάσουν ποια συνέπεια έχει η διάσταση στην αντίστοιχη εικόνα του κλασμοειδούς, συγκρίνοντας εικόνες στο ίδιο στάδιο.

				
N = p = δ =	N = p = δ =	N = p = δ =	N = p = δ =	N = 9 p = δ =

Πίνακας 1: Γεννήτορες κλασμοειδών αυξανόμενης διάστασης

Μια ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στον πέμπτο γεννήτορα (Ν=9, λ=1/3, δ=2).



Ο γεννήτορας αυτός έχει σημεία αυτο-επαφής και παράγει την φημισμένη πρωτοτυπική καμπύλη του Peano, η οποία ‘‘γεμίζει’’ το τετράγωνο (επιλέξτε το σημείο εκκίνησης της χελώνας: σπ θέσεχψ -100 -50 α 45 σκ).

ΦΑΣΗ 4^{η} – ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΙΟΝΟΝΙΦΑΔΑΣ

Για την ανάλυση της περιμέτρου και του εμβαδού δίνουμε στους μαθητές το ΦΕ5. Εδώ οι μαθητές έχουν να συμπληρώσουν ένα πίνακα, του οποίου οι δύο πρώτες γραμμές είναι όπως στον πίνακα 2.

Η χιονονιφάδα αρχίζει με ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους 1, δηλαδή αρχίζει με μήκος πλευράς $\lambda_0 = 1$, αριθμό πλευρών $\alpha_0 = 3$, περίμετρο $\Pi_0 = 3$ και εμβαδόν $E_0 = \sqrt{3}/4$.

Σε κάθε στάδιο διαιρείται κάθε πλευρά σε τρία ίσα τμήματα, κατασκευάζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο στο μεσαίο τμήμα και παραλείπεται το μεσαίο τμήμα. Δηλαδή, σε κάθε στάδιο από κάθε πλευρά προκύπτουν 4 νέες πλευρές και κάθε νέα πλευρά έχει μήκος ίσο με το 1/3 της προηγούμενης. Επομένως στο στάδιο 1 θα είναι:

$$\lambda_1 = (1/3) \text{ x } 1 = 1/3, \qquad \alpha_1 = 3 \text{ x } 4 = 12, \qquad \Pi_1 = 12 \text{ x } (1/3) = 4$$

και στο στάδιο 2:

$$\lambda_2 = (1/3) \text{ x } (1/3) = 1/9, \qquad \alpha_2 = 12 \text{ x } 4 = 48, \qquad \Pi_2 = 48 \text{ x } (1/9) = 16/3.$$

Όσον αφορά το εμβαδόν, στο στάδιο 1 προστίθενται 3 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 1/3 και επομένως με εμβαδόν $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9}$. Άρα στο πρώτο στάδιο το εμβαδόν είναι:

$$E_2 = E_1 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right).$$

Επαγωγικά οι μαθητές αναμένεται να συμπληρώσουν τον πίνακα 2 τουλάχιστον μέχρι το στάδιο 4.

Χιονονιφάδα του Koch				
	Αριθμός Πλευρών	**Μήκος Κάθε Πλευράς**	**Περίμετρος**	**Εμβαδόν**
Αρχή	$\alpha_0 = 3$	$\lambda_0 = 1$	$\Pi_0=3$	$E_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$
Στάδιο 1	$\alpha_1= 12$	$\lambda_1=\frac{1}{3}$	$\Pi_1=4$	$E_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)$

Πίνακας 2: Πίνακας για την περίμετρο και το εμβαδό της χιονονιφάδας για μια επανάληψη

Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν τους γενικούς όρους των ακολουθιών (α_ν), (λ_ν), (Π_ν), (E_ν). Οι μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί γεωμετρικές προόδους θα έχουν πιθανόν πρόβλημα με τις ερωτήσεις αυτές. Όμως και πάλι αυτή η δραστηριότητα της ανακάλυψης μοτίβων και διατύπωσης εικασιών έχει μεγάλη παιδαγωγική αξία (Polya, 1954). Για την περίμετρο, ο ν-ιοστός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\Pi_\nu = 3 \cdot (4/3)^\nu$. Οι όροι της ακολουθίας αυξάνουν απεριόριστα και η περίμετρος οριακά γίνεται άπειρη.

Για το εμβαδόν, ο γενικός όρος είναι: $E_\nu = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}+\ldots\right)$. Οι όροι που αθροίζονται μέσα στην παρένθεση (χωρίς τον πρώτο) αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με α = 1/3 και λόγο λ = 4/9. Επειδή $|\lambda|<1$ υπάρχει το άθροισμα των άπειρων όρων της και είναι ίσο με Σ = α/(1-λ) = 3/5. Άρα το εμβαδόν της χιονονιφάδας είναι

$$E = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8}{5} = \frac{8}{5}\cdot E_0$$

Ώστε, η περίμετρος της χιονονιφάδας είναι άπειρη αλλά το εμβαδόν της δεν ξεπερνά τα 8/5 του εμβαδού του αρχικού τριγώνου. Όπως παρατηρεί ο Egsgard (1988) αν είχαμε ένα κήπο στο σχήμα χιονονιφάδας τότε θα μπορούσαμε να κουρέψουμε το γκαζόν αλλά ποτέ δεν θα μπορούσαμε να βρούμε αρκετά υλικά για να τον περιφράξουμε!

ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Η χιονονιφάδα του Koch δεν είναι το μόνο κλασμοειδές που είναι χρήσιμο για την τάξη. Υπάρχουν πολλά άλλα που μπορούν να μελετηθούν ακολουθώντας τα ίδια βήματα, όπως το τρίγωνο του Sierpinski, το χαλί του Sierpinski, το σφουγγάρι του Monge, κ.ά. (Mandelbrot, 1983). Μία άλλη δυνατότητα προσφέρεται από τη θεωρία του χάους. Το ίχνος μιας χαοτικής διαδικασίας είναι ένα κλασμοειδές. Η κλασμοειδής γεωμετρία εξελίσσεται παράλληλα με τα χαοτικά συστήματα και προσφέρει διάφορες δραστηριότητες επέκτασης (Bedford, 1996; Devaney, 1990).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα επιδιώχτηκε η καταγραφή και μελέτη μιας σειράς χαρακτηριστικών της εκπαιδευτικής διαδικασίας (χρήση εργαλείων διερευνητικής μάθησης, ομαδική συνεργατική δουλειά) σε δύο επίπεδα: (α) σε επίπεδο μαθητών, σχετικά με την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων και (β) σε επίπεδο τάξης, σχετικά με το ρόλο του εκπαιδευτικού και την ακολουθούμενη διδακτική πρακτική. Σε αυτό το πλαίσιο ακολουθήθηκαν ποιοτικές μέθοδοι έρευνας που σχετίζονται με την παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων σε πραγματικό χρόνο (Cohen & Manion, 1994, Yackel & Cobb, 1996).

Σημαντικό για τη μαθησιακή διαδικασία κρίνεται το γεγονός ότι δημιουργήθηκαν στους μαθητές εσωτερικά κίνητρα που προέρχονταν από το ενδιαφέρον και την απόλαυση της δραστηριότητας. Η εκτίμηση αυτή στηρίζεται στα ακόλουθα δεδομένα: στον παρατηρούμενο ενθουσιασμό των μαθητών, την πρόθυμη ανταπόκρισή τους στις απαιτήσεις του έργου που ανέλαβαν, την ενθουσιώδη κατάθεση των απόψεων και των προτάσεών τους και την ανάληψη πρωτοβουλιών για την επίλυση των προβλημάτων που ανέκυπταν. Τέλος, το αξιόλογο αποτέλεσμα της εργασίας τους σε σχέση με τα στενά χρονικά περιθώρια καταδεικνύει το βαθμό της δέσμευσής τους.

Η αυτό-ομοιότητα, ένα από τα παράδοξα του απείρου που παρουσιάζονται σε αυτό το υλικό, και η κλασμοειδής διάσταση αποτέλεσαν το θέμα πολλών ζωηρών συζητήσεων μεταξύ των ομάδων αλλά και με το διδάσκοντα. Η κλασμοειδής διάσταση έγινε τελικά αποδεκτή ως μια φυσιολογική εξέλιξη των γνωστών τους ακέραιων διαστάσεων ως ένα μέσο χαρακτηρισμού των νέων σχημάτων που γνώρισαν.

Η χρησιμοποίηση του Χελωνόκοσμου ανέδειξε τη δύναμη της τεχνολογίας στη μελέτη περίπλοκων ιδεών. Οι μαθητές σε ένα ποσοστό 50% ήταν εξοικειωμένοι με το προγραμματιστικό περιβάλλον της Logo και συνέθεσαν χωρίς δυσκολία τα απλά προγράμματα που χρειάστηκαν στις δραστηριότητες, καθώς και εκείνα με παραμετρικές διαδικασίες. Ο διδάσκων για να βοηθήσει όλους τους μαθητές διέθεσε μια επιπλέον διδακτική ώρα για να παρουσιάσει τις βασικές εντολές της Logo μέσω απλών δραστηριοτήτων, κατασκευή μεταβλητού τετραγώνου (με στόχο τη χρήση μεταβλητής και της εντολής 'επανάλαβε'), κατασκευή μεταβλητού ορθογωνίου (με στόχος τη χρήση περισσότερων από μία μεταβλητών για μια γεωμετρική κατασκευή). Όλοι όμως οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες με τη λειτουργία των επαναληπτικών διαδικασιών. Ωστόσο, μπόρεσαν εύκολα να τροποποιούν την επαναληπτική διαδικασία που γεννά την χιονονιφάδα του Koch ώστε να δημιουργούν τα άλλα κλασμοειδή των δραστηριοτήτων.

Ένα άλλο σημείο με ιδιαίτερη σημασία από ερευνητική και διδακτική σκοπιά είναι ότι μέσα από τον πειραματισμό αναδείχτηκε το ατέρμονο της διαδικασίας για την κατασκευή του κλασμοειδούς και γι' αυτό περιοριζόμαστε σε μια προσεγγιστική εικόνα του κλασμοειδούς.

Τελικά, όπως προκύπτει από την δημιουργία των προγραμμάτων, τη συμπλήρωση των ΦΕ, αλλά και από διαλόγους μεταξύ των μαθητών και με τον διδάσκοντα οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά σε όλες τις δραστηριότητες και οι στόχοι που τέθηκαν εξαρχής επιτεύχθηκαν σε ικανοποιητικό βαθμό.

Το σενάριο μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε τάξη από τη Γ΄ Γυμνασίου έως τη Γ΄ Λυκείου, στα πλαίσια των καινοτόμων δράσεων, με την προϋπόθεση ότι ο διδάσκων θα κάνει επιλογή των δραστηριοτήτων ανάλογα (α) με τις έννοιες του αναλυτικού προγράμματος, (β) με τη σχολική τάξη που θα επιλέξει, (γ) με το διαθέσιμο χρόνο (μπορεί να παρουσιάσει κάποια τμήματα του σεναρίου με προβολέα δεδομένων ή να δώσει κάποια αρχεία εντολών έτοιμα στους μαθητές). Το θέμα δεν περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, όμως το σενάριο ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα και την ανακάλυψη, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους σε ένα περιβάλλον πραγματικών εφαρμογών και οδηγεί τους μαθητές να δουν τον κόσμο με νέο τρόπο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barnsley, M. F. (1988). *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press.

Bedford, C. W. (1996) *Fractals and Chaos: A Precalculus Course*. California.

Cohen, L. & Manion, L. (1994) *Research Methods in Education*, Routledge, London & New York.

Devaney, R. L. (1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*. California: Addison-Wesley.

Egsgard, J. C. (1988). An Interesting Introduction to Sequences and Series. *Mathematics Teacher* 81(2), 108-111.

Harel, I. & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research Reports and Essays*. NJ: Ablex Publishing Corporation.

Jonassen, D. (2006). Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change (3rd ed.). NJ: Pearson Education, Inc.

Kern, J. F. and Mauk, C. C. (1990). Exploring Fractals – a Problem-solving Adventure Using Mathematics and Logo. *Mathematics Teacher* 83, 179-185.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Modelsand modeling perspectives 0n mathematics problem solving , and teaching* (pp. 3-33). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MacGuire, M. (1991). *An eye for fractals: A graphic and photographic essay*. California: Adisson-Wesley.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman & Co.

Mercer, N. (1996) The quality of talk in children.s collaborative activity in the classroom, *Learning and Instruction*, Vol. 6, No4, pp.359-377.

Papert, S. (1980). *Mindstorms, Children, Computers and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning, vol.I. Princeton: Princeton University Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London / Washington D.C.: The Falmer Press.

Vergnaud, G. (1991). *Théorie des Champs Conceptuels*. Recherches en Didectique des Mathématiques, 10(2/3), 133-169.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.